TEMA III

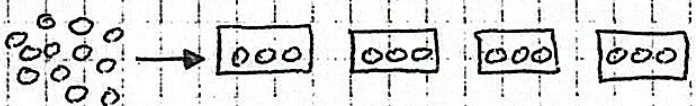
DIVISIBILIDAD

1. Dividir

a) Dividir es repartir.

Cuando queremos resolver un problema en el que tenemos una cantidad (de objetos, animales, personas,...) que debemos distribuir o repartir, a partes iguales, aparece la división.

- Ejemplo: Juan tiene 12 canicas y las quiere repartir, a partes iguales, en ~~4~~ cuatro cajas. ¿Cuántas colocará en cada una?



$12 : 4 = 3$

A veces no es posible realizar el reparto de forma exacta o completa; en ese caso queda una cantidad sin repartir llamada resto.

- Ejemplo: Antonia tiene 18 € y cinco nietos. Quiere dar la misma cantidad a cada uno. ¿Cómo se realiza el reparto?

$$\begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

A cada uno da 3 €.

Le quedan 3 € sin repartir (resto).

b) Dividir números.

Ya sabemos dividir. ¿Qué es 18 : 2?

Es $18 : 2 = 9$

Dividir b entre a (b : a) es encontrar un número c que multiplicado por a nos dé b.

$\boxed{b : a = c \quad \text{significa} \quad b = a \cdot c}$

b → dividendo
a → divisor
c → cociente

A veces no es posible encontrarlo, como en 18 : 4. Queda una cantidad residual denominada resto.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 4 \\ \hline 2 & 4 \end{array} \qquad \text{dividendo} \rightarrow b \;\; \begin{array}{|l} a \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{divisor}$$

$$\text{resto} \rightarrow r \qquad c \leftarrow \text{cociente}$$

Dividendo = divisor · cociente + resto.

c) División exacta: divisibilidad.

Cuando al dividir b entre a obtenemos resto cero decimos que la división es exacta, y también se dice que b es divisible por a.

- Ejemplos:

a) ¿17 es divisible por 2? No, porque la división 17 : 2 no es exacta.

b) ¿20 es divisible por 10? Sí, porque 20 : 10 = 2 (es exacta)

NOTA: en el ejercicio 4 repasaremos las reglas de divisibilidad.

2. Múltiplos y divisores.

a) Concepto.

Cuando b es divisible por a se dice:

- a es divisor de b.
- b es múltiplo de a.

- Ejemplo:

$$3 \underset{\text{es múltiplo}}{\overset{\text{es divisor}}{\rightleftarrows}} 9$$

- Ejemplo: Hallemos los divisores de 18.

1, 2, 3   6, 9, 18

D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

• Ejemplo: Hallemos los múltiplos de 5 comprendidos entre 12 y 38.

$5 \cdot 3 = 15$, $5 \cdot 4 = 20$, $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 6 = 30$; $5 \cdot 7 = 35$

b) Primos y compuestos.

Un primo es un número que sólo es divisible entre sí mismo y el 1. Un número es compuesto cuando no es primo.

No hay una regla para obtener los primos.

Los primeros primos son: 1, 2, 3, 5, 7, 11...

• Ejemplo: clasifica como primo o como compuesto.

Primos: 13, 29, 11.

Compuestos: 8, 21, 63.

c) Descomponer en factores primos.

Se trata de expresar como producto de números primos.

• Ejemplos:

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad 63 = 3^2 \cdot 7$ $\qquad 160 = 2^5 \cdot 5$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

3. M.C.D. (Máximo Común Divisor)

a) Concepto.

Dados varios números enteros, su máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.

• Ejemplo: hallemos el m.c.d de 12 y 18.

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Divisores comunes $= \{1, 2, 3, \boxed{6}\}$

m.c.d. $(12, 18) = 6$

• Ejemplo: hallemos el m.c.d. $(18, 24, 30)$

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Divisores comunes $= \{1, 2, 3, \boxed{6}\}$

m.c.d $(18, 24, 30) = 6$

b) Regla.

En los casos más complicados usamos esta regla de cálculo:

1º. Descomponemos en factores primos.

2º. Tomamos los factores comunes con menor exponente.

• Ejemplo: hallemos el m.c.d. de 12 y 18.

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad$ $18 = 2 \cdot 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.d. $(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$

• Ejemplo: halle el m.c.d (a, b) donde

$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^4$

$b = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$

Es

$$m.c.d.(a,b) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$$

4. M.C.M. (Mínimo Común Múltiplo)

a) Concepto.

Dados varios números enteros su mínimo común múltiplo es el menor de los múltiplos comunes a todos ellos.

• Ejemplo: hallemos el m.c.m de 12 y 18.

$\dot{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, \ldots\}$

$\dot{18} = \{18, 36, 54, \ldots\}$

$m.c.m.(12, 18) = 36$

b) Regla.

En los casos más complicados usamos esta regla de cálculo:

1º_ Descomponemos en factores primos.

2º_ Tomamos los factores comunes con mayor exponente y los no comunes.

• Ejemplo: hallemos el m.c.m. de 12 y 18.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 3^2 \cdot 2 \end{array}\right\} m.c.m(12,18) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

• Ejemplo: hallemos el m.c.m. (a,b) donde

$$\left.\begin{array}{l} a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^4 \\ b = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \end{array}\right\} \text{m.c.m}(a,b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^4 = 16 \cdot 9 \cdot 125 \cdot 49 \cdot 14641 =$$

$= \underline{\qquad\qquad}$