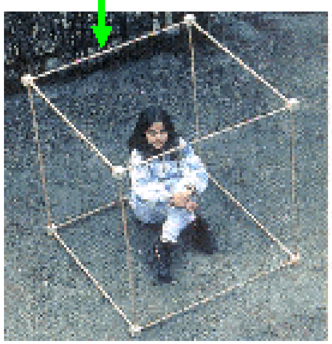
Volumen de los cuerpos. Unidades de volumen

Cada cuerpo ocupa una determinada cantidad de espacio, que se llama volumen.

Para medir el volumen de un cuerpo se compara con el volumen de otro cuerpo que se elige como unidad.

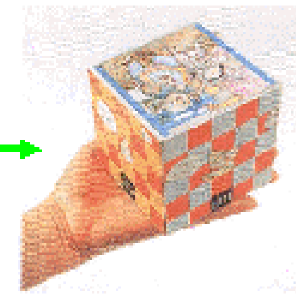
Algunas unidades de volumen son:

El **metro cúbico**: m^3



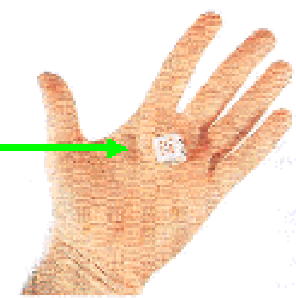
Es un cubo de un metro de arista.

El **decímetro cúbico**: dm^3



Es un cubo de un dm de arista.

El **centímetro cúbico**: cm^3

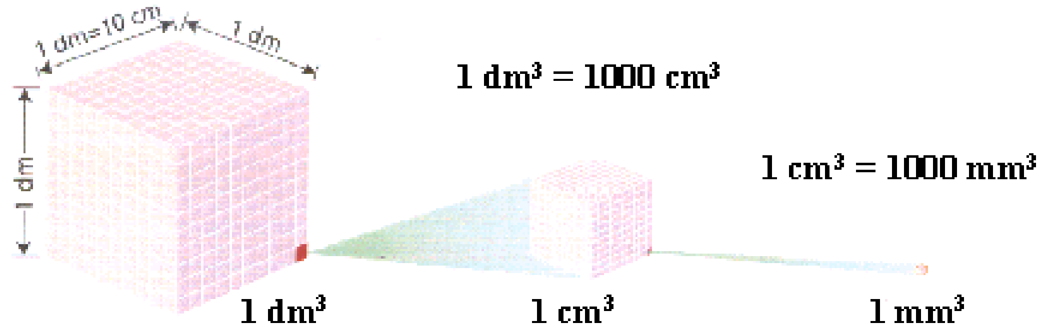


Es un cubo de un cm de arista.

Relación entre las unidades de volumen

La unidades de volumen son:

$$\underbrace{km^3 \quad hm^3 \quad dam^3}_{\text{Múltiplos}} \qquad m^3 \qquad \underbrace{dm^3 \quad cm^3 \quad mm^3}_{\text{Submúltiplos}}$$



$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000 \cdot 1000\ mm^3 = 1\,000\,000\ mm^3$$

Una unidad de volumen es **1000 veces mayor** que la del orden inmediato inferior, y **1000 veces menor** que la del orden inmediato superior.

Cambio de unidad: de mil en mil

Para pasar de una unidad a otra se sigue el esquema:

De mayor a menor: Se multiplica por 1000

	$\times$ 1000		$\times$ 1000		$\times$ 1000		$\times$ 1000		$\times$ 1000		$\times$ 1000	
km^3	$\rightleftarrows$	hm^3	$\rightleftarrows$	dam^3	$\rightleftarrows$	m^3	$\rightleftarrows$	dm^3	$\rightleftarrows$	cm^3	$\rightleftarrows$	mm^3
	: 1000		: 1000		: 1000		: 1000		: 1000		: 1000	

De menor a mayor: Se divide entre 1000

Ejemplo. Expresa en cm^3:

a) $3{,}5\ m^3 \xrightarrow{\times 1000000} 3\,500\,000$

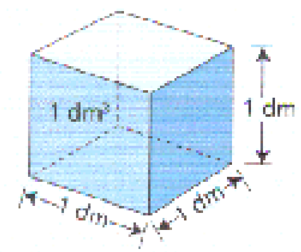
b) $8\ dm^3 \xrightarrow{\times 1000} 8\,000$

c) $1{,}75\ dm^3 \xrightarrow{\times 1000} 1\,750$

d) $12300\ mm^3 \xrightarrow{:\,1000} 12{,}3$

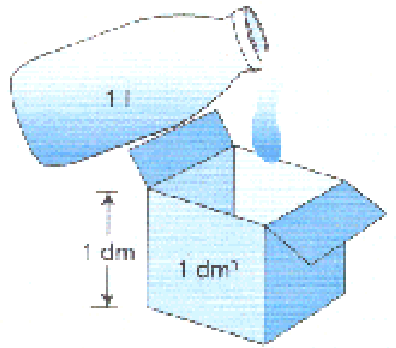
Unidades de capacidad

Recordamos las unidades de capacidad y sus relaciones con las unidades de volumen.



El litro es la capacidad de una caja cúbica de 1 dm de arista.

$$\boxed{1\ dm^3 = 1\ l}$$



$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ litro} = 1000 \text{ ml} \\ 1\ dm^3 = 1000\ cm^3 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{1\ cm^3 = 1\ ml}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\ kl = 1000\ l \\ 1\ m^3 = 1000\ dm^3 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{1\ m^3 = 1\ kl}$$

EJEMPLOS

Pasamos a litros:

$0{,}5\ m^3 = 0{,}5\ kl = 500\ l$

$1500\ cm^3 = 1500\ ml = 1{,}5\ l$

$0{,}250\ dm^3 = 0{,}250\ l$

Pasamos a cm³:

$25\ l = 25\ dm^3 = 25000\ cm^3$

$500\ cl = 5\ l = 5\ dm^3 = 5000\ cm^3$

$2500\ ml = 2500\ cm^3$

Unidades de capacidad: Aplicaciones

El volumen de muchos recipientes que utilizamos viene expresado en unidades de capacidad.

33 cl

Ejemplo 1. La foto muestra una lata de 33 centilitros (cl) de refresco de limón. ¿Cuál es su volumen?

$$33 \text{ cl} = 330 \text{ ml} = 330 \text{ cm}^3$$

El volumen de esta lata es 330 cm^3


30 ml

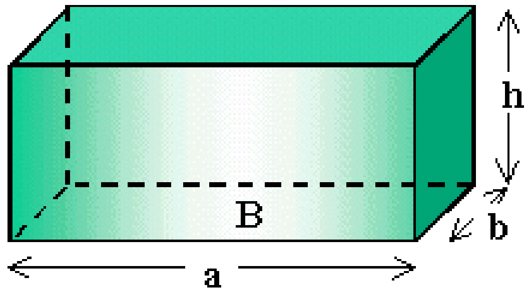
Ejemplo 2. Esta otra foto muestra un recipiente de líquido corrector en el que aparece la leyenda: 30 ml. ¿Podemos afirmar que su volumen es de 30 mm^3?

La similitud entre los prefijos de mililitro y de milímetro cúbico nos puede inducir a responder que sí, pero:

$$30 \text{ ml} = 30 \text{ cm}^3 = 30000 \text{ mm}^3$$

Volumen del ortoedro

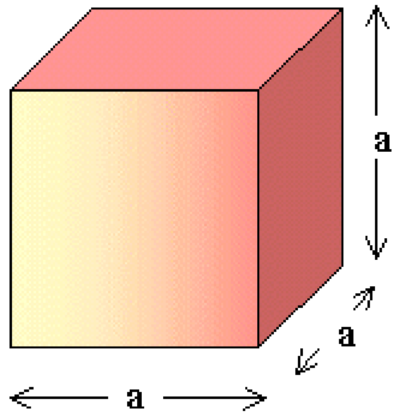
• **Ortoedro**



Para calcular el **volumen de los ortoedros** multiplicamos el largo (a) por el ancho (b) por alto (h).

$$V = a \cdot b \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V = B \cdot h$$

• **Cubo**



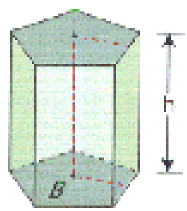
El cubo es un ortoedro particular, cuyas caras son cuadrados iguales.

El **volumen de un cubo** es igual al cubo de la medida de la arista.

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Volumen de los prismas

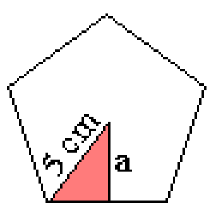
El volumen de cualquier prisma se calcula multiplicando el área de la base, B, por su altura, h.



$$\mathbf{V = B \cdot h}$$

Si el polígono de la base es regular, su área se calcula aplicando la fórmula $B = \frac{p \cdot a}{2}$, siendo **p** el perímetro de la base y **a** su apotema.

Ejercicio. Calcular el volumen del prisma de la figura.



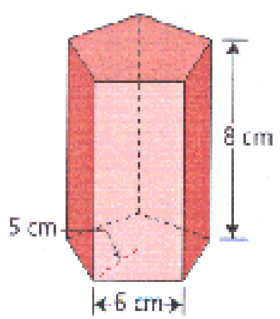
Perímetro de la base, $p = 5 \cdot 6 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

Apotema: Por Pitágoras, $5^2 = a^2 + 3^2$

$a^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$.

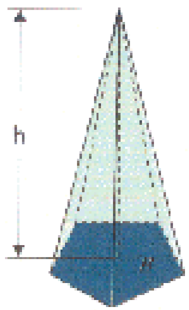
Área de la base: $B = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{30 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$

Volumen: $V = B \cdot h = 60 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 480 \text{ cm}^3$

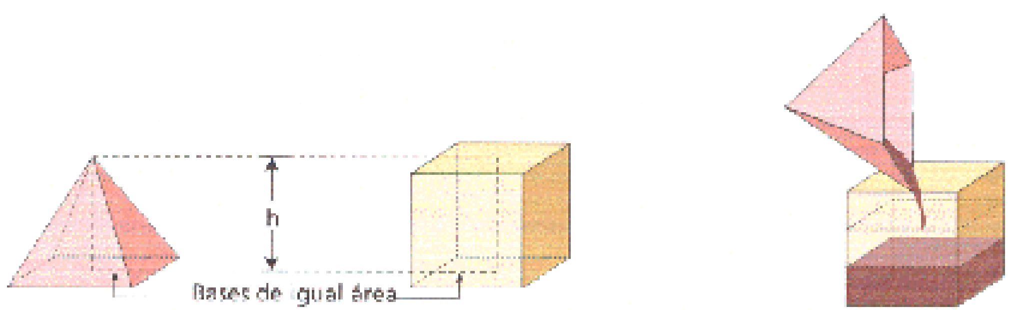


Volumen de las pirámides

El **volumen de una pirámide** es igual a un tercio del área de la base por la altura.



$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

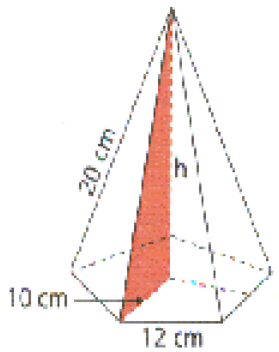


$$V_{\text{pirámide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} = \frac{B \cdot h}{3}$$

Si el polígono de la base es regular, su área se calcula aplicando la fórmula $B = \frac{p \cdot a}{2}$, siendo **p** el perímetro de la base y **a** su apotema.

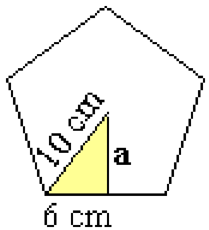
Volumen de las pirámides: Ejercicio

Calcular el volumen de la pirámide cuyas dimensiones se indican en la figura.



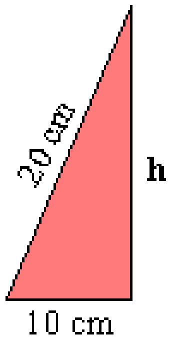
Perímetro de la base: $p = 5 \cdot 12 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$.

Apotema de la base: aplicando Pitágoras,



$$a^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}.$$

Área de la base: $B = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{60 \cdot 8}{2} \text{ cm}^2 = 240 \text{ cm}^2$



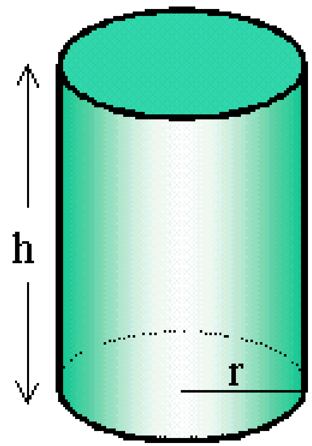
Altura h: nuevamente aplicamos Pitágoras,

$$h^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \Rightarrow h = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ cm}$$

Volumen: $V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 240 \cdot 17{,}32 \text{ cm}^3 = 1385{,}6 \text{ cm}^3$

Volumen del cilindro

Si el número de caras de un prisma crece indefinidamente, se transforma en un cilindro.



El volumen del cilindro, como en el caso del prisma, es igual al área de la base por su altura.

Como la base de un cilindro es un círculo, su área es $B = \pi \cdot r^2$; por tanto:

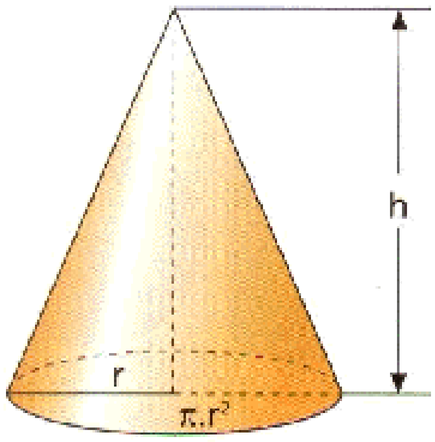
$$\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Ejemplo. Calcula el volumen de un cilindro de altura 18 cm y radio de la base 5 cm.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad V = \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 18 = 1413 \text{ cm}^3$$

Volumen del cono

Si el número de caras de una pirámide crece indefinidamente, se transforma en un cono.



El volumen del cono, lo mismo que en la pirámide, es igual a un tercio del área de la base por la altura.

Como la base de un cono es un círculo, su área es $B = \pi \cdot r^2$; por tanto:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

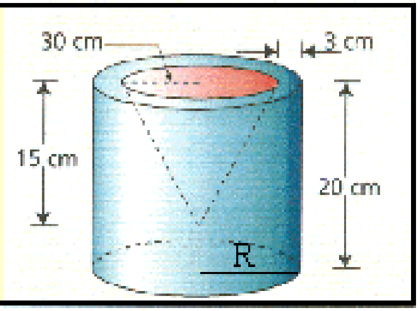
Ejemplo. El volumen de un cono de altura 12 cm y radio de la base 4 cm es:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12}{3} = 200{,}96 \text{ cm}^3$$

Volumen de cuerpos redondos: Aplicación

Ejercicio. A partir de un tronco de encina se ha construido el recipiente que muestra la figura.

¿Cuál es la capacidad del recipiente? ¿Cuánto pesa, si 1 dm^3 de madera de encina pesa 1,052 kg?



La capacidad es la correspondiente al volumen del cono invertido, cuyas dimensiones son: Altura: h = 15 cm. Radio de la base: r = 30 cm.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Longrightarrow V = \frac{3{,}14 \cdot 30^2 \cdot 15}{3} = 14\,130 \text{ cm}^3$$

14 130 cm^3 = 14,13 dm^3 = 14,13 litros.

Capacidad: 14,13 litros

El peso es el correspondiente al volumen de madera de la parte maciza del tronco: el cilindro menos el hueco del cono.

Altura del cilindro: $h' = 20$ cm. Radio de su base: $R = 30 + 3 = 33$ cm.

Volumen: $V' = \pi R^2 h' \Longrightarrow V' = 3{,}14 \cdot 33^2 \cdot 20 = 68389{,}2 \text{ cm}^3 \approx 68{,}39 \text{ dm}^3$

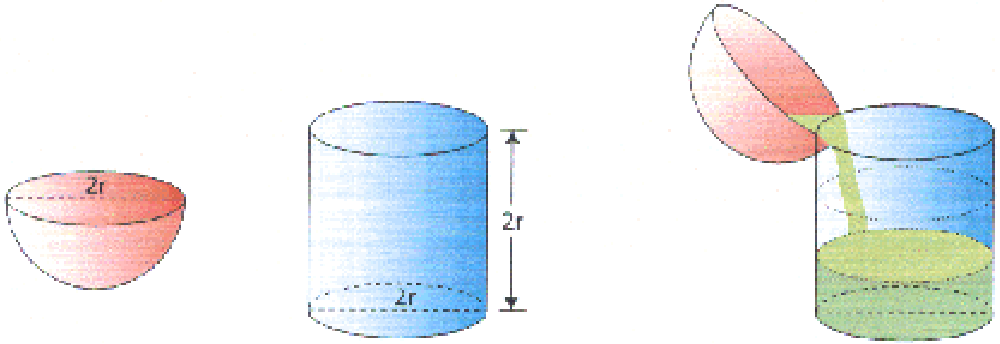
Volumen de madera = $V' - V = 68{,}39 \text{ dm}^3 - 14{,}13 \text{ dm}^3 = 54{,}26 \text{ dm}^3$

Peso: $P = 1{,}052 \cdot \text{volumen} = 1{,}052 \cdot 54{,}26 = 57{,}08$ kg

Peso: 57,08 kg

Volumen de la esfera

El volumen de una semiesfera es igual a un tercio del volumen de un cilindro cuya altura y diámetro de la base coinciden con el diámetro de la semiesfera:



$$V_{esfera} = 2 \cdot V_{semiesfera}$$

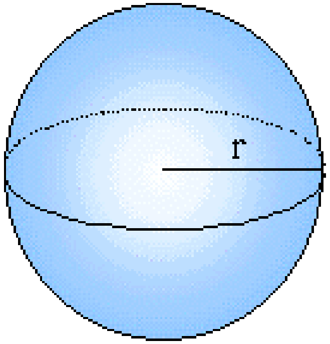
$$\Downarrow$$

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (\pi\, r^2) \cdot (2r) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

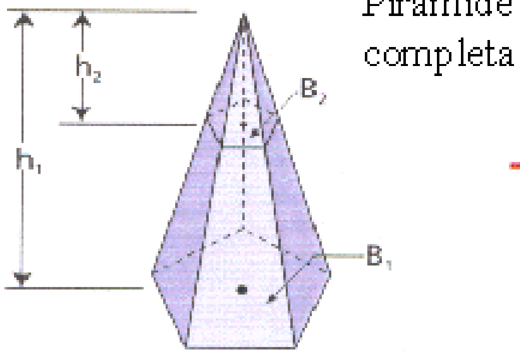
El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del número π por el cubo del radio.

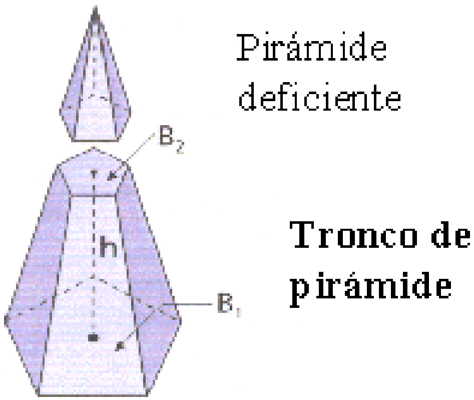
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$



Volumen del tronco de pirámide

El volumen del tronco de pirámide se puede obtener haciendo la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el volumen de la pirámide deficiente.





Volumen de la pirámide completa:

$$V_1 = \frac{B_1 \cdot h_1}{3}$$

Volumen de la pirámide deficiente:

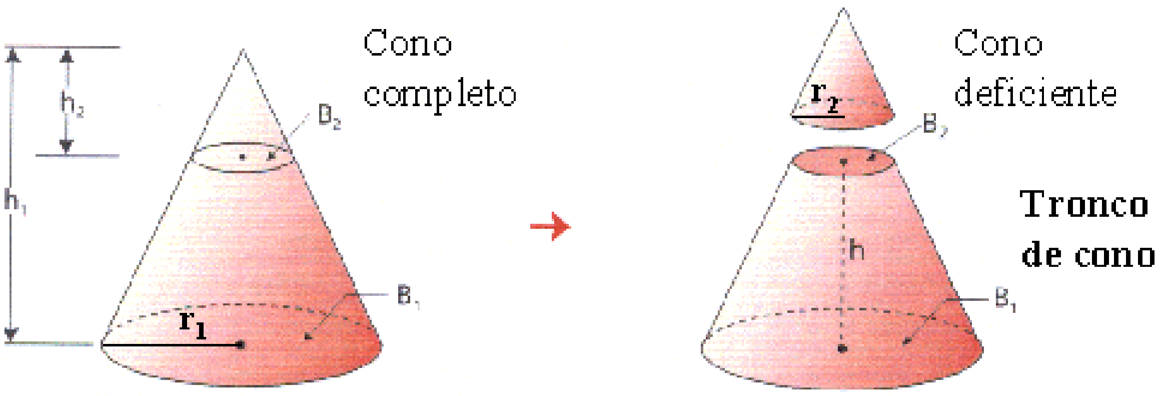
$$V_2 = \frac{B_2 \cdot h_2}{3}$$

El volumen del tronco de pirámide es: $V = V_1 - V_2$

$$\boxed{V = \frac{B_1 \cdot h_1}{3} - \frac{B_2 \cdot h_2}{3}}$$

Volumen del tronco de cono

El volumen del tronco de cono se puede obtener haciendo la diferencia entre el volumen del cono completo y el volumen del cono deficiente.



Volumen del cono completo:

$$V_1 = \frac{B_1 \cdot h_1}{3} = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1}{3}$$

Volumen del cono deficiente:

$$V_2 = \frac{B_2 \cdot h_2}{3} = \frac{\pi \cdot r_2^2 \cdot h_2}{3}$$

El volumen del tronco de cono es: $V = V_1 - V_2$

$$\boxed{V = \frac{B_1 \cdot h_1}{3} - \frac{B_2 \cdot h_2}{3} = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot r_2^2 \cdot h_2}{3}}$$

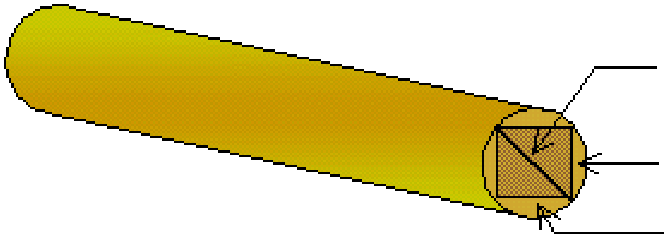
Resolución de problemas

PROBLEMA

Una serrería tiene que fabricar vigas de base cuadrada a partir de troncos cilíndricos de madera de 6 m de largo y 70 cm de diámetro. ¿Cuáles son las dimensiones aproximadas de la mayor viga que se puede serrar de cada tronco?

Hacer un dibujo e indicar los datos

Puede ser este:



Plantear la ecuación

Para que la viga sea la mayor posible, el diámetro tiene que ser la diagonal del cuadrado.

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 70 cm.

Llamando x a los catetos, por Pitágoras: $x^2 + x^2 = 70^2$

Resolver la ecuación

$x^2 + x^2 = 70^2 \Rightarrow 2x^2 = 4900 \Rightarrow x^2 = 2450 \Rightarrow x = \sqrt{2450} \approx 49{,}50$

Interpretar el resultado

Cada viga es un prisma cuadrangular de 6 m de altura y 49,50 cm de lado.