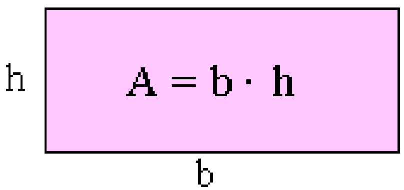
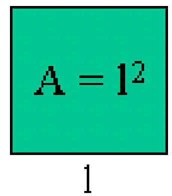
Áreas de polígonos

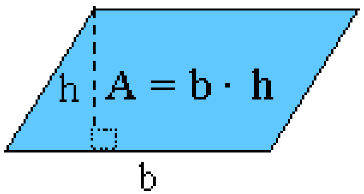
Rectángulo



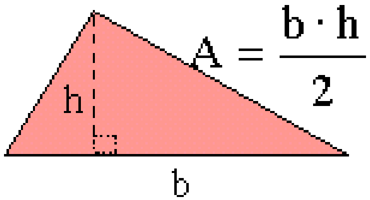
Cuadrado



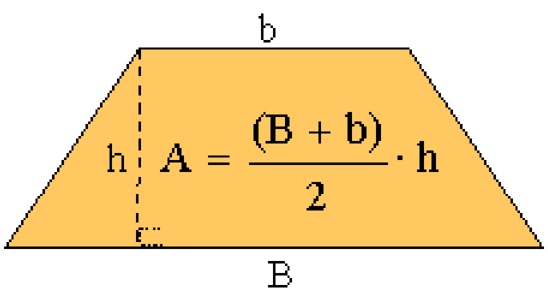
Paralelogramo



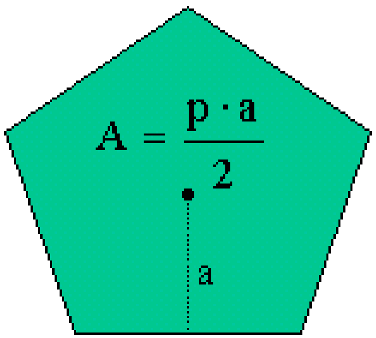
Triángulo



Trapecio

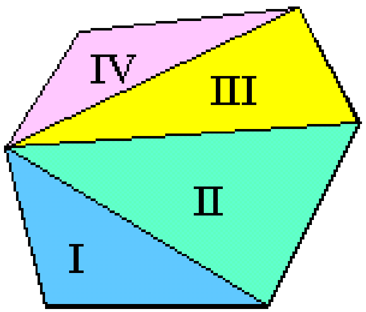


Polígono regular



p = perímetro

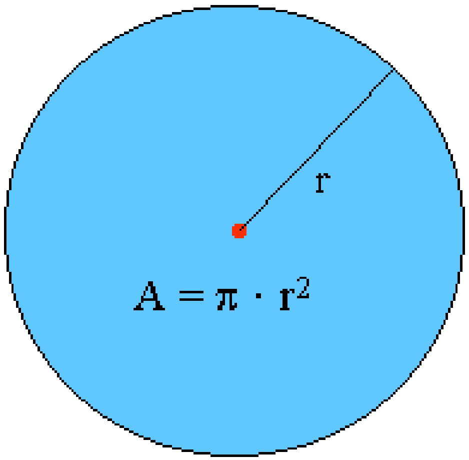
Polígono cualquiera



El área de un polígono cualquiera es igual a la suma de las áreas de los triángulos que puedan formarse. En este caso, a la suma de las áreas I, II, III y IV.

Áreas de figuras circulares

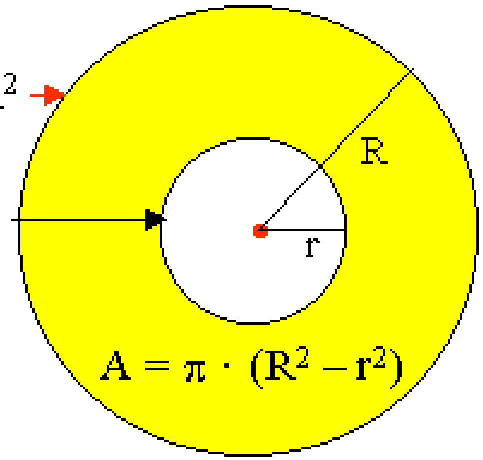
Círculo



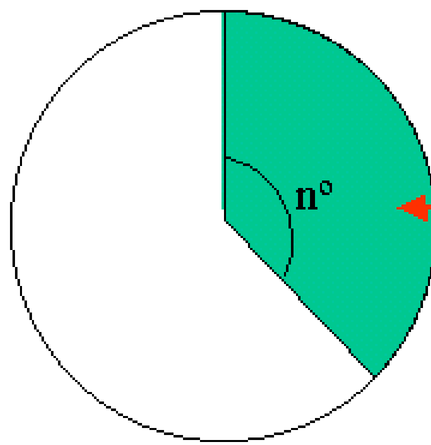
Corona circular

$A_G = \pi \cdot R^2$

$A_p = \pi \cdot r^2$



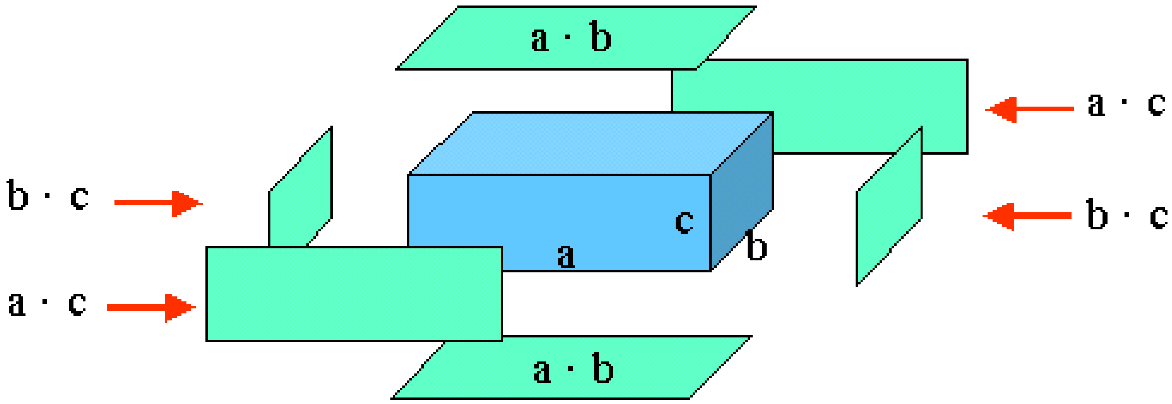
Sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

Área del ortoedro

Las caras del ortoedro son rectángulos, siendo las caras opuestas iguales.

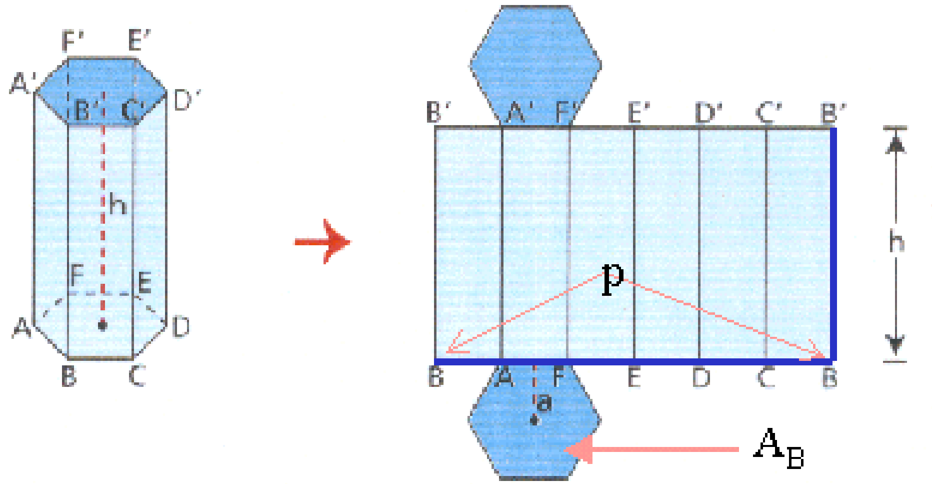


$$A_{TOTAL} = 2ab + 2ac + 2bc$$

El **área total de un ortoedro** es igual a la suma de las áreas de sus caras.

Área del prisma regular

Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos, y sus bases son polígonos regulares.



La suma del área de todos los rectángulos es el área lateral del prisma.

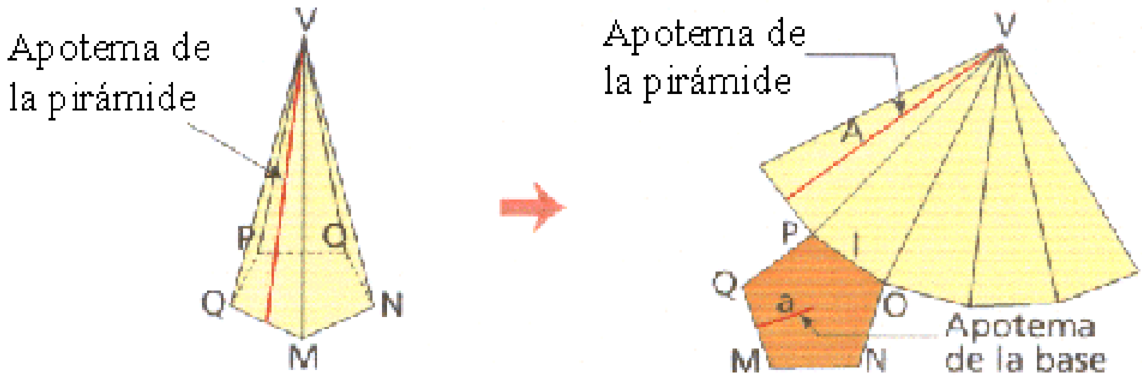
$$A_{LATERAL} = BB \cdot BB' = p \cdot h$$

El **área total del prisma** regular se obtiene sumando a la lateral la de los dos polígonos de las bases.

$$A_{TOTAL} = A_L + 2 \cdot A_B$$

Área de la pirámide regular

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales, y la base un polígono regular.



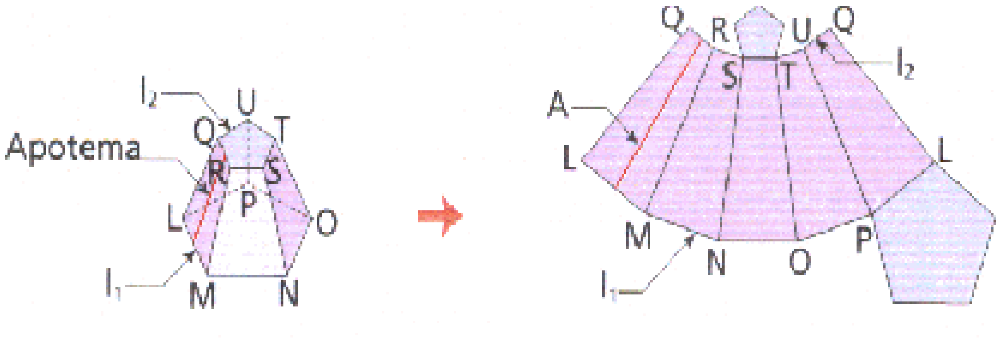
El **área lateral de la pirámide regular** es la suma de las áreas de los triángulos de sus caras.

$$A_{LATERAL} = 5 \cdot \text{ área de un triángulo} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot A = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot l) \cdot A = \frac{p \cdot A}{2}$$

El **área total de la pirámide regular** se obtiene sumando a la lateral el área de la base.

$$A_{TOTAL} = A_L + A_B$$

Área de un tronco de pirámide regular



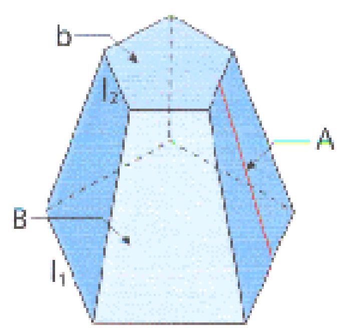
El **área lateral de un tronco de pirámide regular** es la suma de las áreas de los trapecios iguales de sus caras.

En este caso son cinco trapecios. El área de cada uno de ellos es: $\frac{1}{2}\cdot(l_1 + l_2)\cdot A$

$$A_{LATERAL} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot(l_1 + l_2)\cdot A = \frac{1}{2}\cdot(5\cdot l_1 + 5\cdot l_2)\cdot A = \frac{1}{2}\cdot(p_1 + p_2)\cdot A$$

(p_1 y p_2 son los perímetros de la base mayor y menor, respectivamente.)

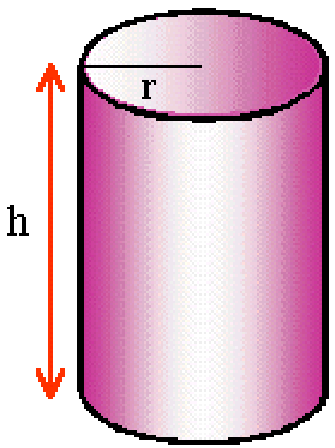
El **área total del tronco de pirámide** se obtiene sumando al área lateral el área del polígono de la base mayor, B, y de la base menor, b.

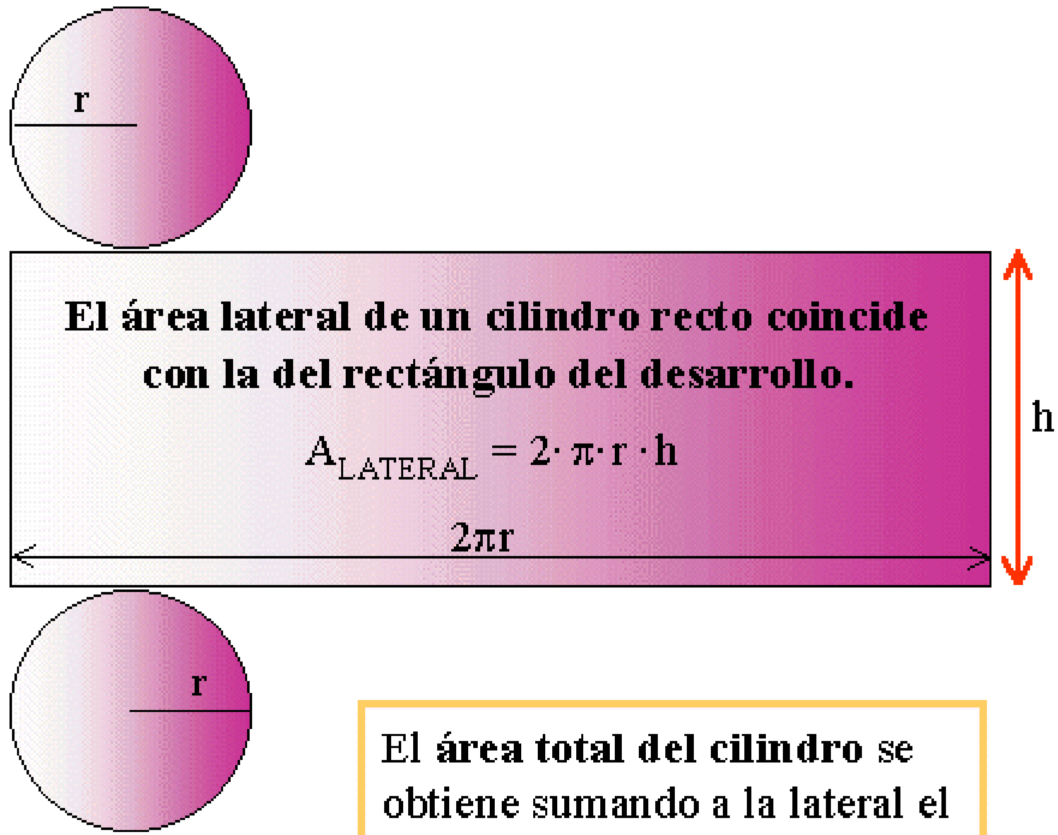


$$A_L = \frac{p_1 + p_2}{2}\cdot A$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b$$

Área de un cilindro



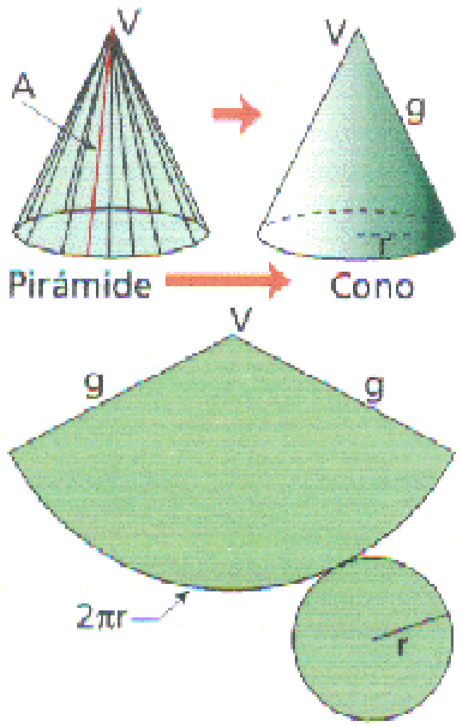


$A_L = 2\ \pi\ r\ h$

$A_{TOTAL} = A_L + 2\ \pi\ r^2$

El **área total del cilindro** se obtiene sumando a la lateral el doble del área del círculo de la base: $2\ \pi\ r^2$.

Área del cono



Si el número de caras de la pirámide creciera indefinidamente, se transformaría en un cono.

Correspondencias:

Pirámide		Cono recto
Apotema: A	→	Generatriz: g
Perímetro: p	→	Longitud de la circunferencia: $2\pi r$
$A_{LATERAL}$ $\frac{1}{2}\cdot p\cdot A$	→	$A_{LATERAL}$ $\frac{1}{2}\cdot(2\,\pi\,r\,g)=\pi\,r\,g$

$$A_L = \pi\, r\, g$$

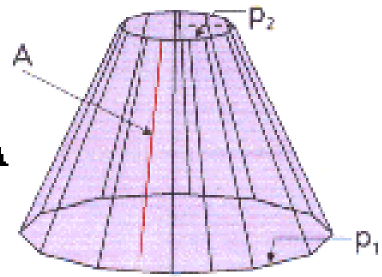
$$A_{TOTAL} = A_L + \pi\, r^2$$

El **área total del cono** se obtiene sumando a la lateral el área del círculo de la base: $\pi\, r^2$.

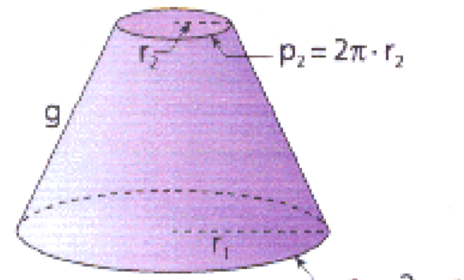
Área de un tronco de cono recto

Un tronco de cono puede considerarse como un tronco de pirámide en el que el número de caras laterales ha crecido indefinidamente.

$$A_L = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot A$$



Tronco de pirámide



Tronco de cono

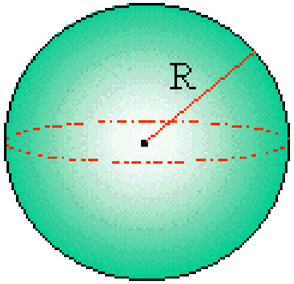
Teniendo en cuenta la correspondencia (perímetro–longitud de la circunferencia y apotema–generatriz), **el área lateral del tronco de cono será:**

$$A_{LATERAL} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot g = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot g = \pi (r_1 + r_2)\, g$$

El **área total del tronco de cono recto** se obtiene sumando a la lateral el área de los dos círculos de las bases: $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$A_T = A_L + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

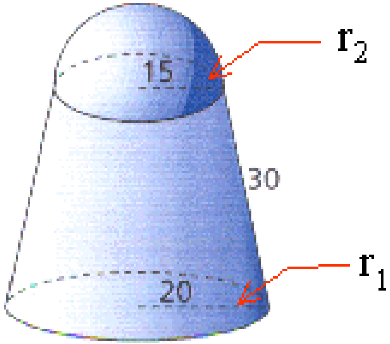
Área de la superficie esférica



El **área de la superficie esférica** es cuatro veces la del círculo máximo: $A = 4\,\pi\,R^2$.

EJERCICIO RESUELTO

La figura representa un cuerpo hueco fabricado con hojalata. Calcular la superficie de la hojalata que se ha necesitado para fabricarlo. (Las longitudes viene dadas en centímetros)



Área de la semiesfera:

$$A = \frac{1}{2}\cdot(4\pi\, r_2^{\,2}) = 2\pi\, r_2^{\,2} = 2\cdot 3{,}14\cdot 15^2\ \text{cm}^2 = 1413\ \text{cm}^2$$

Área lateral del tronco de cono:

$$A_L = \pi\cdot(r_1 + r_2)\cdot g =$$
$$= 3{,}14\cdot(20+15)\cdot 30\ \text{cm}^2 = 3297\ \text{cm}^2$$

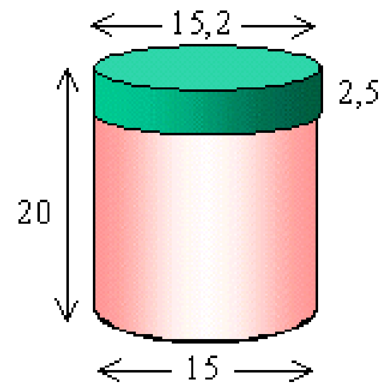
Superficie de hojalata: $1413\ \text{cm}^2 + 3297\ \text{cm}^2 = 4710\ \text{cm}^2$

Resolución de problemas (I)

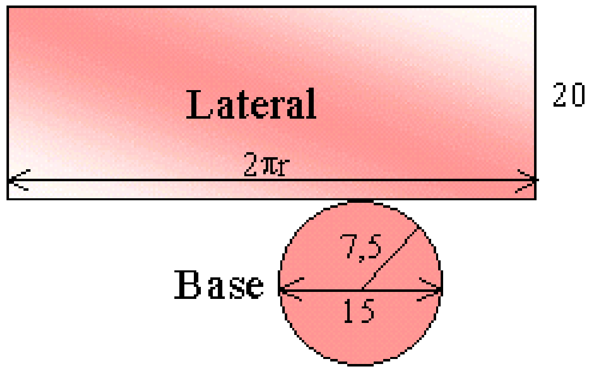
PROBLEMA

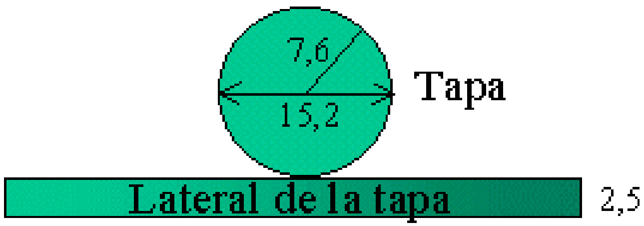
A partir de dos planchas rectangulares de metal, de 50 cm por 20 cm, se desea fabricar un envase de base cilíndrica, de 15 cm de diámetro y 20 cm de altura. La tapa deberá tener 15,2 cm de diámetro y 2,5 cm de "borde" para acoplarse adecuadamente con el envase. Calcular la superficie de plancha que se aprovecha y la que se desperdicia en recortes.

- **Expresar la situación planteada mediante un dibujo**
  Dibujamos el envase indicando los datos conocidos.



- **Dibujar el desarrollo de los cuerpos geométricos**





Resolución de problemas (II)

PROBLEMA

A partir de dos planchas rectangulares de metal, de 50 cm por 20 cm, se desea fabricar un envase de base cilíndrica, de 15 cm de diámetro y 20 cm de altura. La tapa deberá tener 15,2 cm de diámetro y 2,5 cm de "borde" para acoplarse adecuadamente con el envase. Calcular la superficie de plancha que se aprovecha y la que se desperdicia en recortes.

Aplicar las fórmulas del cálculo de áreas

$A_{lateral} = 2\pi rh = 6{,}28 \cdot 7{,}5 \cdot 20 = 942\ cm^2$ $\qquad A_{base} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 7{,}5^2 = 176{,}63\ cm^2$

$$A_{ENVASE} = 942\ cm^2 + 176{,}63\ cm^2 = 1118{,}63\ cm^2$$

$A_{Tapa} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 7{,}6^2 = 181{,}37\ cm^2$

$A_{lateral\ de\ la\ tapa} = 2\pi rh' = 6{,}28 \cdot 7{,}6 \cdot 2{,}5 = 119{,}32\ cm^2$

$$A_{TOTAL\ TAPA} = 181{,}37\ cm^2 + 119{,}32\ cm^2 = 300{,}69\ cm^2$$

Superficie de chapa que se aprovecha: $1118{,}63\ cm^2 + 300{,}69\ cm^2 = 1419{,}32\ cm^2$

Como se disponía de dos chapas de 20 por 50 ($2 \cdot 50 \cdot 20 = 2000\ cm^2$) se desperdician $2000 - 1419{,}32 = 580{,}68\ cm^2$ de chapa.

NOTA: El lateral del envase se corta de una chapa; la base, la tapa y el lateral de la tapa, se cortan de la otra chapa.