Figuras semejantes

La foto pequeña de la escultura mide 21 mm de ancho y 35 de alto.

La foto grande es una ampliación y sus dimensiones son 36 mm de ancho por 60 mm de alto.

Las dimensiones correspondientes son proporcionales, ya que verifican las relaciones siguientes:

$$\frac{60}{36} = \frac{35}{21} \iff 60 \cdot 21 = 36 \cdot 35 = 1260$$

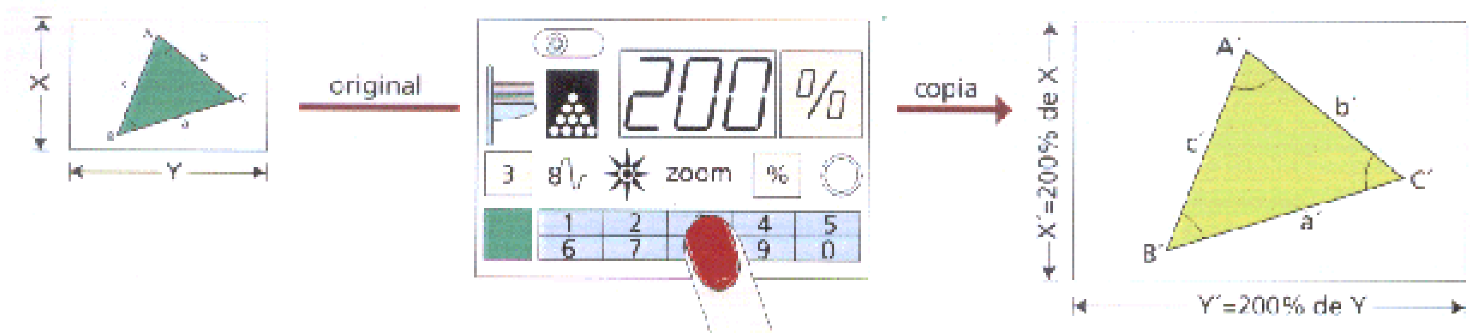
Por eso decimos que son figuras semejantes.

Dos figuras son semejantes cuando los segmentos determinados por cualquier par de puntos del original y los segmentos correspondientes de la copia son proporcionales.

El cociente de dos segmentos correspondientes se llama razón de semejanza o escala. Se designa por la letra k.

Triángulos semejantes

En la siguiente figura se muestra la ampliación del triángulo ABC a escala 200%.



Si comparamos los ángulos y los lados del triángulo original y de la copia se tiene:

· Los ángulos son iguales: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$.

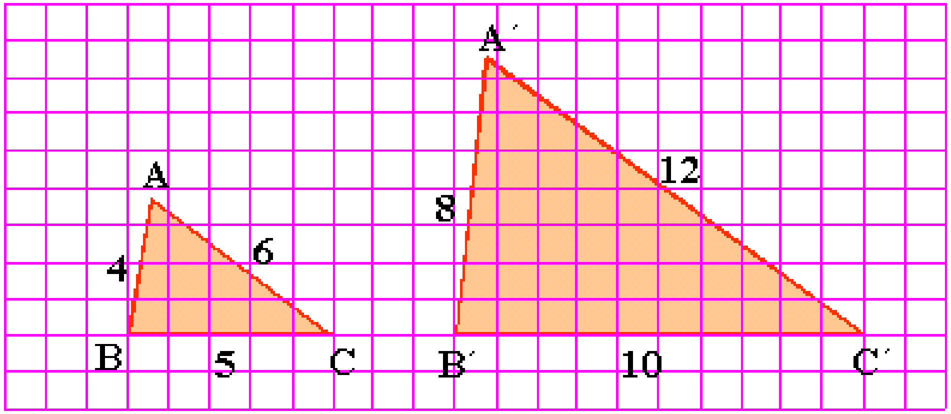
· Los lados son proporcionales: $a' = 2a$, $b' = 2b$, $c' = 2c$. Aquí $k = 2 = 200\%$

Dos triángulos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

Semejanza de triángulos: Criterio 1

La semejanza de triángulos se puede determinar más fácilmente mediante los **criterios de semejanza de triángulos**.

Los dos triángulos de la figura tienen los lados proporcionales: k = 2.



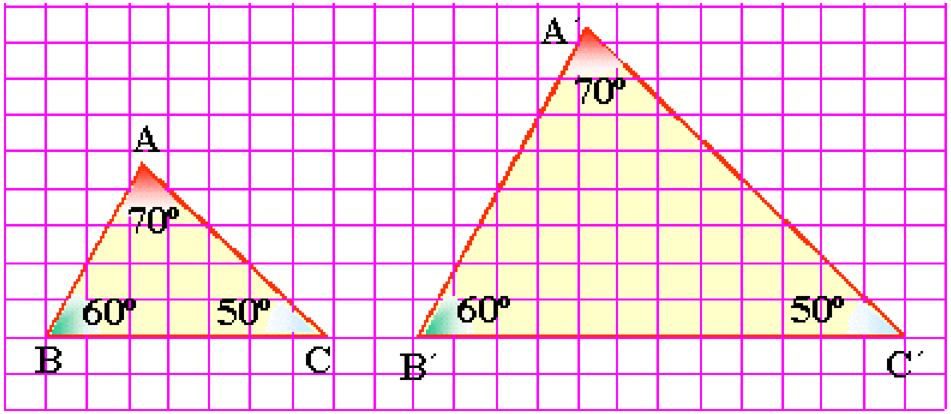
Si mides con un transportador puedes comprobar que los ángulos correspondientes son iguales: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$.

Criterio 1

Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.

Semejanza de triángulos: Criterio 2

Los dos triángulos de la figura tienen los tres ángulos iguales.



Si mides con una regla milimetrada los lados de los triángulos puedes comprobar que los lados correspondientes son proporcionales:

$$A'B' = 2\,AB; \quad A'C' = 2\,AC; \quad B'C' = 2\,BC$$

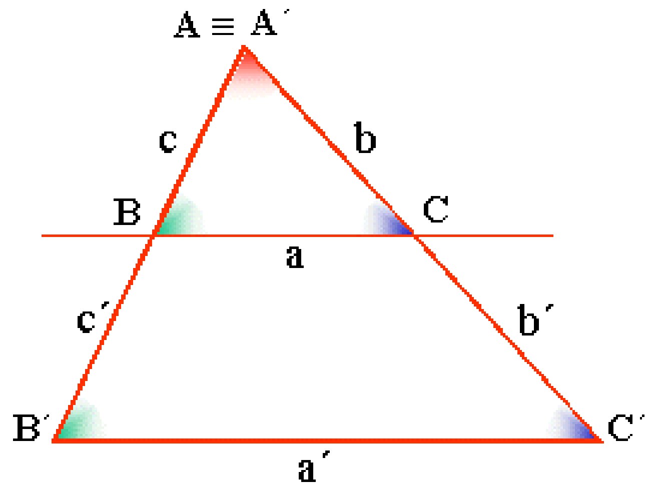
Criterio 2

Dos triángulos son semejantes si tienen los tres ángulos iguales.

Teorema de Tales

Construye un triángulo A´B´C´ y traza una paralela a uno de los lados y que corte a los otros lados. Se forma así un triángulo pequeño ABC.

Vamos a comprobar que los dos triángulos son semejantes:



Si medimos los valores de **los lados** de cada uno de los triángulos se observa que **son proporcionales**:

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$$

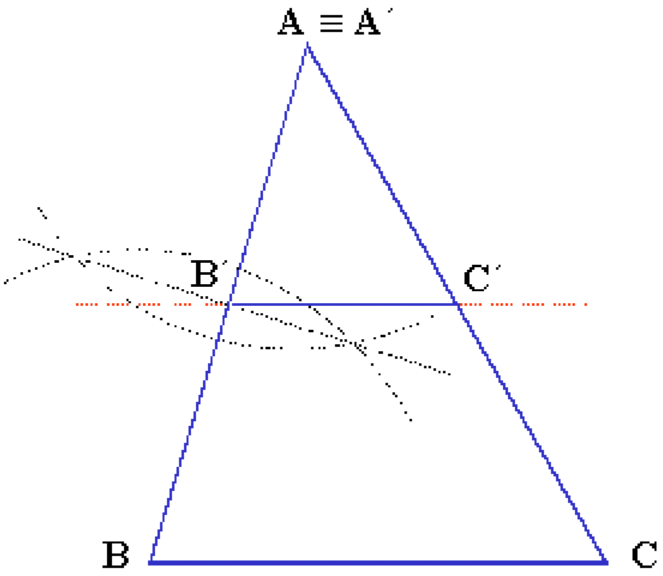
Los ángulos son iguales por tener los lados paralelos: $\boxed{\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'}$

Este resultado es válido para cualquier triángulo y se conoce como teorema de Tales.

Toda paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo pequeño, ABC, semejante al grande, A´B´C´ (A ≡ A´).
Los triángulos semejantes, ABC y A´B´C´ se dice que están en posición de Tales.

Teorema de Tales: Ejercicio

Construir un triángulo semejante a ABC, dado en la figura, siendo la razón de semejanza 0,5.



Si A´B´C´ es semejante a ABC sus lados deben ser la mitad, ya que $k = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

La construcción es así:

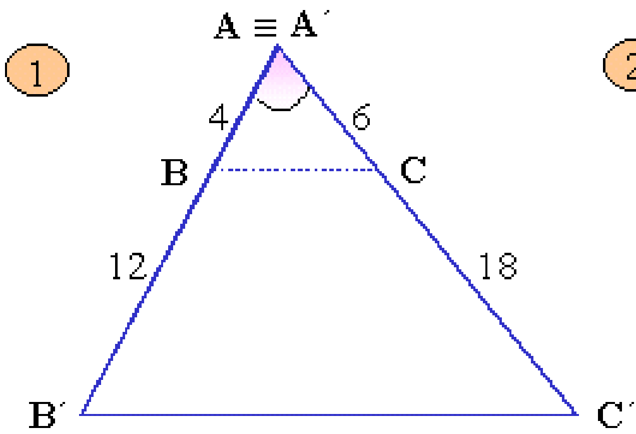
· Se halla el punto medio B´de AB.
Se utiliza la mediatriz del segmento AB.

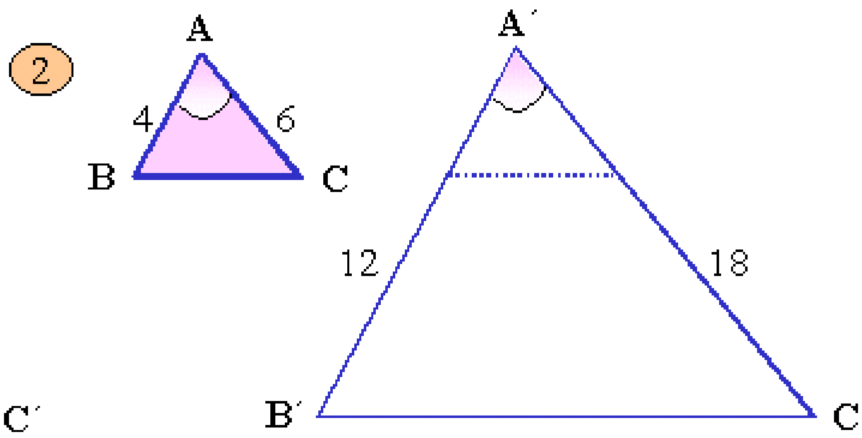
· Por B´se traza la recta B´C´ paralela a BC.

Por estar en posición de Tales, los triángulos A´B´C´ (A´≡ A) y ABC son semejantes.

Semejanza de triángulos: Criterio 3

Observa las siguientes figuras:





En la figura 1 dos triángulos están en posición de Tales. El lado BC es paralelo a B´C´.

En la figura 2 los dos triángulos están separados.

¿Qué condición deben cumplir estos triángulos para colocarlos en posición de Tales?

· Los ángulos A y A´ deben se iguales.

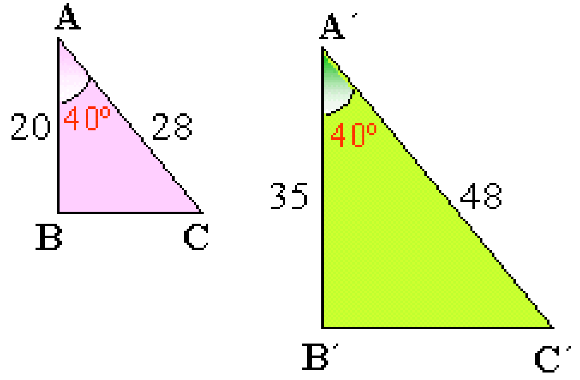
· Los lados que los determinan deben ser proporcionales.

Criterio 3

Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.

Semejanza de triángulos: Ejercicio

En la figura adjunta se representan dos triángulos:
a) ¿Son semejantes? b) ¿Se pueden colocar en posición de Tales?



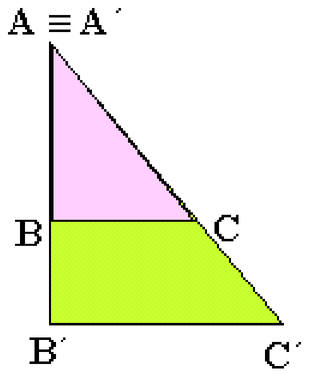
a) Los triángulos tiene los ángulos A y A´ iguales.

Los lados son proporcionales pues:

$$\frac{20}{35} = \frac{28}{49} \text{ ya que } 20 \cdot 49 = 35 \cdot 28 = 980.$$

Por el criterio 3 los triángulos son semejantes.

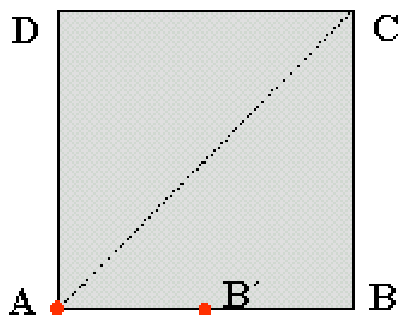
b) Se pueden poner posición de Tales



Construcción de polígonos semejantes: Método de Tales

> Dos polígonos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

Vamos a construir un cuadrado semejante a ABCD siendo la razón de semejanza o escala 1 : 2 y el vértice elegido el A.

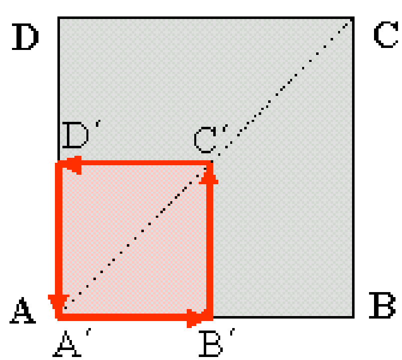


1. Desde A se traza la diagonal AC.

2. En uno de los lados se toma el punto medio. Por ejemplo B´.

3. Partiendo de B´se trazan los lados B´C´, C´D´, D´A´ y A´B´ paralelos a los lados dados.

Los lados de A´B´C´D´ son la mitad que los de ABCD.



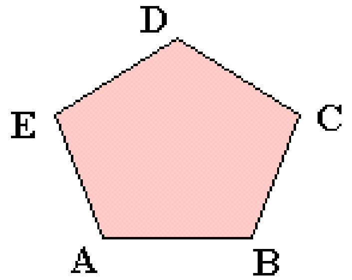
Ambos cuadrados son semejantes ya que tienen:

– Los ángulos iguales, por tener los lados paralelos.

– Los lados proporcionales, por ser ABC y A´B´C´ triángulos en posición de Tales, y también ACD y A´C´D´.

Construcción de polígonos semejantes: Ejercicio

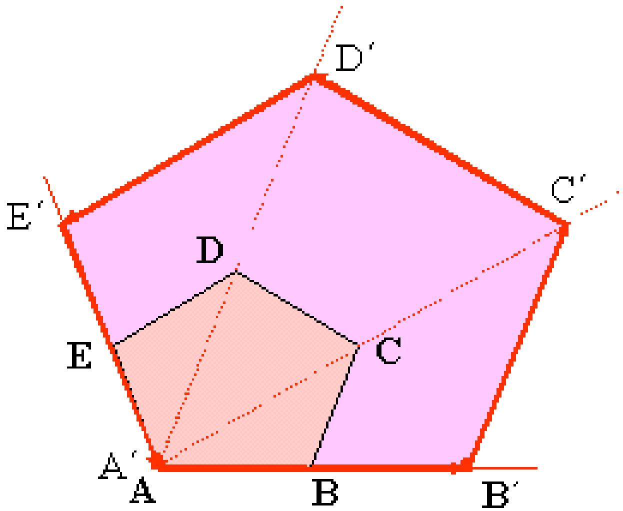
Construir un pentágono semejante a ABCDE siendo la escala 2 : 1.



1. Desde A se trazan las diagonales y se prolongan los lados AB y AE.

2. En la prolongación del lado AB se dibuja el punto B´ de modo que el segmento AB´= 2 AB.

3. Partiendo de B´se trazan los lados B´C´, C´D´, D´E´, E´A´ y A´B´ paralelos a los lados dados.

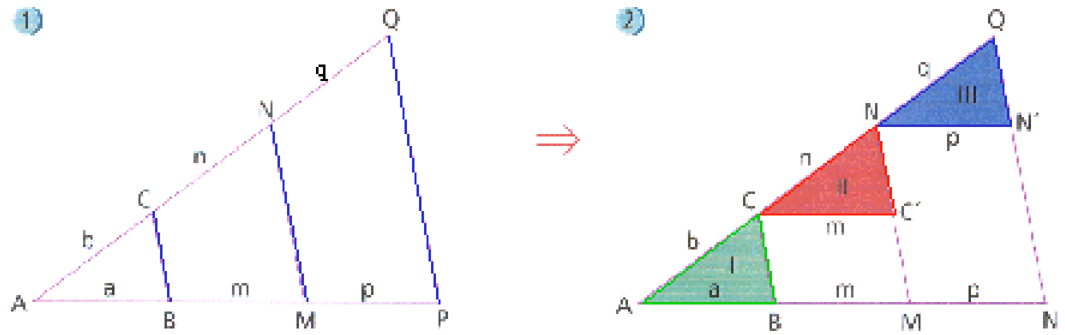


El pentágono A´B´C´D´E´es semejante al dado.

División de un segmento en partes proporcionales

Dos paralelas a un lado de un triángulo, que cortan a los otros dos lados, determinan la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$



1. Los lados BC, MN y PQ son paralelos.

2. Los triángulos I, II y III son semejantes por tener los ángulos correspondientes iguales al ser sus lados paralelos.

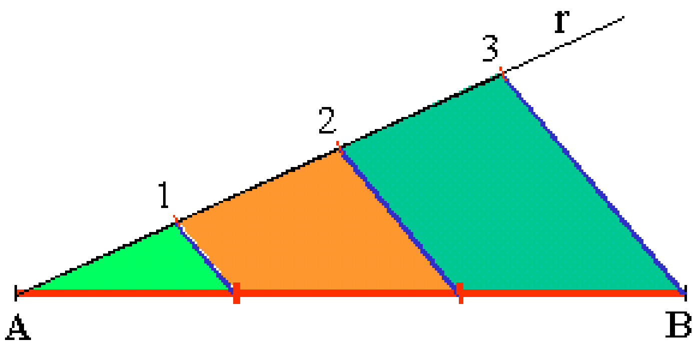
Por tanto se da la relación de proporcionalidad: $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

División de un segmento en partes iguales

El resultado anterior nos permite dividir un segmento en partes iguales, pues si en la relación de proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ se cumple que $a = m = p$, entonces $b = n = q$.

Como ejercicio vamos a dividir el segmento AB en 3 partes iguales.

Para ello:

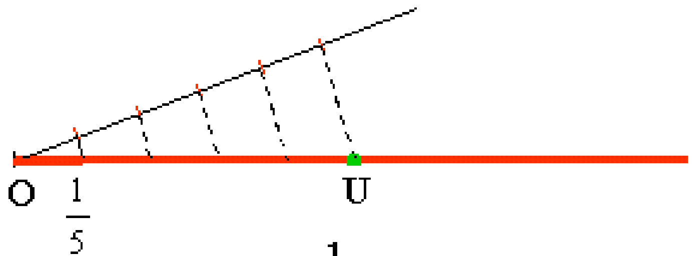


1. Por el punto A trazamos la recta r.
2. A partir de A, sobre r, medimos tres veces la misma distancia: 1, 2, 3.
3. Unimos el punto 3 con B. Por 1 y 2 trazamos paralelas a 3-B.

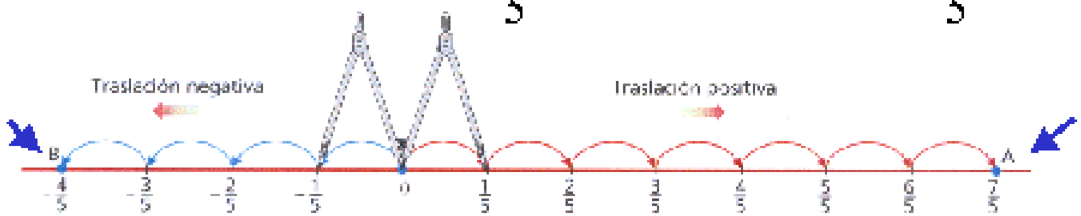
Por ser iguales las distancias sobre r también lo serán sobre el segmento AB.

Representación de números racionales

Para representar $\frac{1}{5}$ se divide la unidad en 5 partes iguales.



Conocido el punto correspondiente a $\frac{1}{5}$ se pueden representar $\frac{7}{5}$ y $-\frac{4}{5}$



A partir del origen se lleva hacia la derecha siete veces la unidad fraccionaria $\frac{1}{5}$.

Se obtiene así el número racional $\frac{7}{5}$.

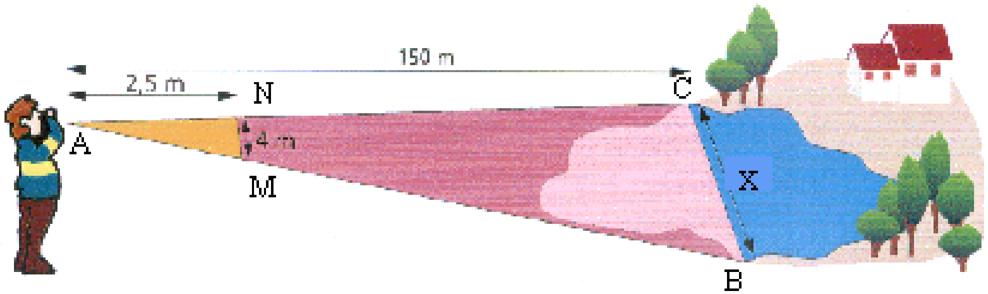
Si se lleva hacia la izquierda cuatro veces la unidad fraccionaria $\frac{1}{5}$ se obtiene el número racional $-\frac{4}{5}$.

Este proceso se generaliza para cualquier número racional. Representada la unidad fraccionaria correspondiente al número dado, se traslada hacia la izquierda o hacia la derecha a partir del origen para obtener el número racional deseado.

Resolución de problemas

PROBLEMA

¿Cuál es la anchura x del lago?



Buscar dos triángulos semejantes en donde aparezca la incógnita

Los triángulos ABC y AMN son semejantes ya que los lados MN y BC son paralelos.

Establecer la relación de proporcionalidad

La relación de proporcionalidad es: $\dfrac{2{,}5}{150} = \dfrac{4}{x}$

Utilizar los productos cruzados para calcular la incógnita

$$\frac{2{,}5}{150} = \frac{4}{x} \Rightarrow 2{,}5\,x = 4 \cdot 150 \Rightarrow x = 240 \text{ m}$$