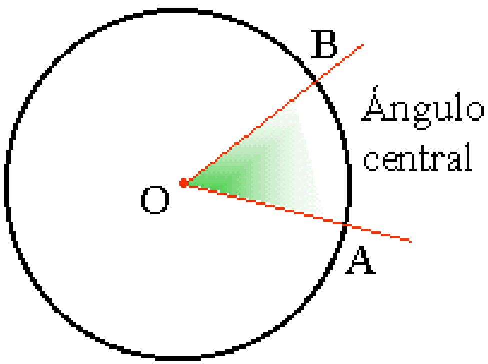
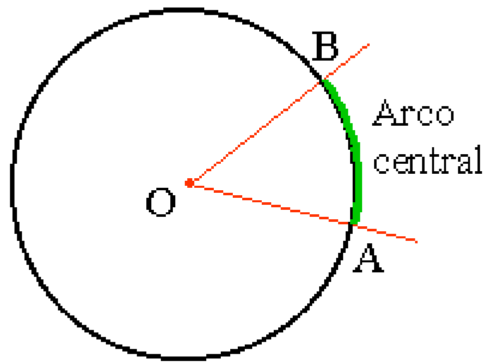
# Ángulo central y su arco

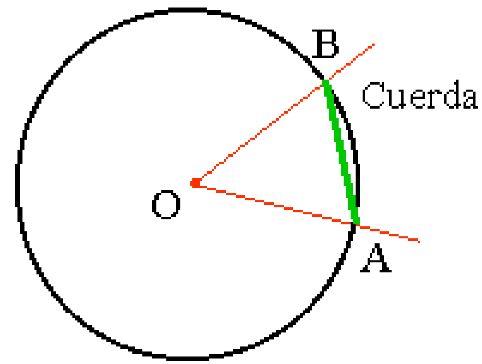
Trazamos una circunferencia de centro el punto O.
Desde O trazamos los segmentos OA y OB.

El ángulo AOB se llama ángulo central.

El arco AB se llama arco correspondiente al ángulo central. El segmento AB se llama cuerda.



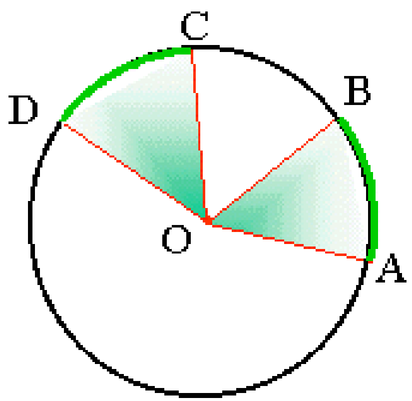

Un ángulo central queda determinado cuando se conoce cualquiera de estas tres medidas:

- La medida del ángulo AOB.
- La longitud del arco correspondiente AB.
- La longitud de la cuerda AB.

**Ángulo central** es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de la misma.

# Relación entre ángulos centrales y arcos

Si dos ángulos centrales son iguales, también lo son los arcos correspondientes o sus cuerdas, y recíprocamente.

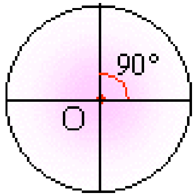



Si el arco AB es igual al arco CD, los ángulos centrales correspondientes son iguales.

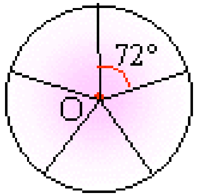
La medida de un arco central es la misma que la de su ángulo central correspondiente.

**Aplicación:**

1. Si se divide una circunferencia en cuatro partes iguales, cada ángulo central vale 90º.



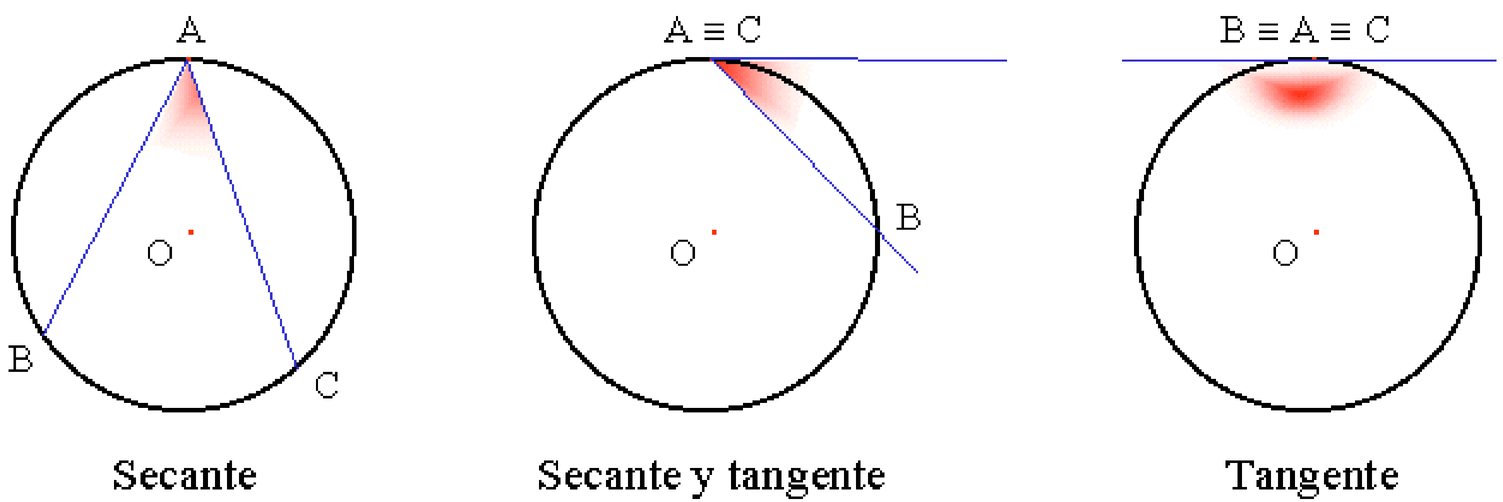

2. Si se divide una circunferencia en cinco partes iguales, cada ángulo central vale 72º.




$$\frac{360}{5} = 72$$

# Ángulo inscrito: definición

En la circunferencia de centro O, si A es un punto de ella podemos trazar, con vértice en A, los siguientes ángulos:




Ángulo inscrito en una circunferencia es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes o tangentes.

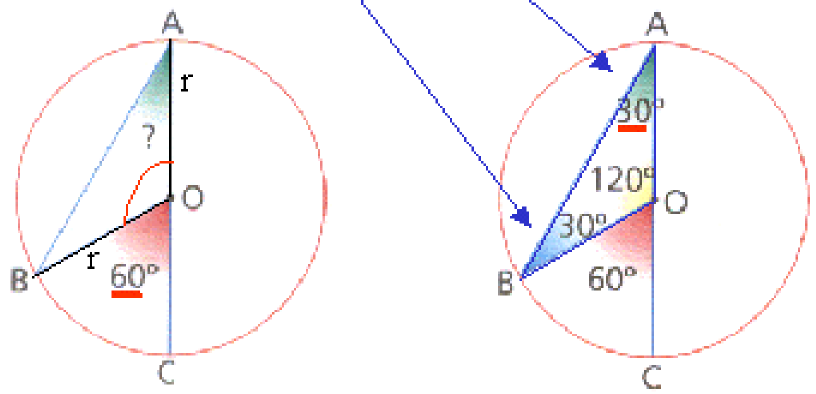
# Relación entre ángulos inscritos y centrales: Ejemplo 1

El ángulo central BOC mide 60º. ¿Cuánto medirá el ángulo inscrito BAC?

El ángulo BOA mide 120º por ser suplementario de de BOC = 60º.

El triángulo ABO es isósceles por tener dos lados iguales: los radios.

Por tanto, los otros ángulos son iguales y miden 30º. El ángulo inscrito BAC mide 30º.



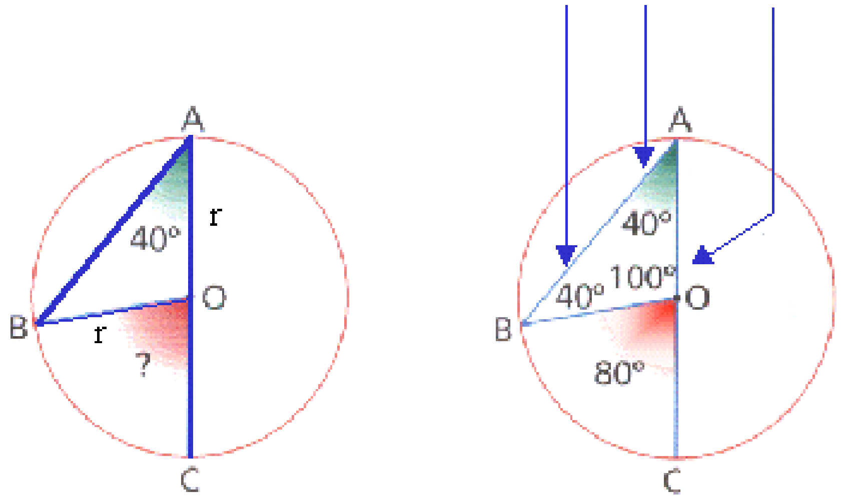

**El ángulo inscrito, BAC, mide la mitad del ángulo central, BOC, que abarca el mismo arco, BC.**

# Relación entre ángulos inscritos y centrales: Ejemplo 2

El ángulo inscrito BAC mide 60º. ¿Cuánto medirá el ángulo central BOC?

El triángulo ABO es isósceles por tener dos lados iguales: los radios.

Por tanto, los ángulos del triángulo miden 40º, 40º y 100º.

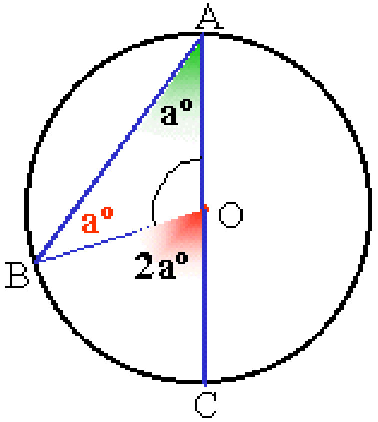



El ángulo BOC medirá 80º por ser suplementario de BOA.

**El ángulo central, BOC, mide el doble del ángulo inscrito, BAC, que abarca el mismo arco, BC.**

# Medida de un ángulo inscrito

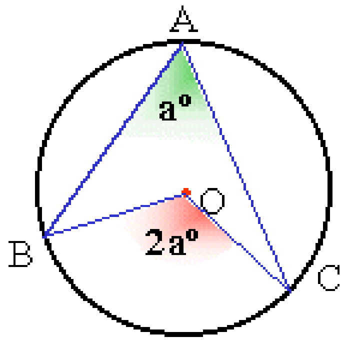
Cuando uno de los lados contiene a un diámetro, el ángulo inscrito mide la mitad que el ángulo central que abarca el mismo arco.

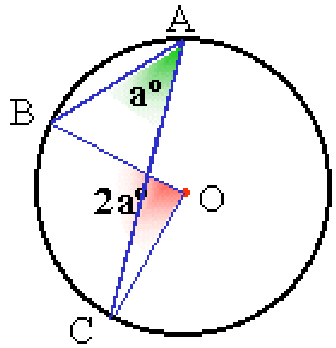


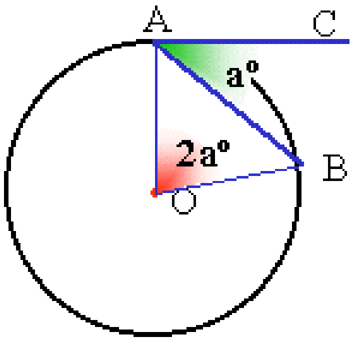

Si el ángulo BAC mide a°, como el triángulo BOA es isósceles, el ángulo ABO también valdrá a°.

Por tanto, el ángulo BOA = 180 – 2a° ➔ El ángulo BOC = 2a°

Esta propiedad se cumple para cualquier ángulo inscrito



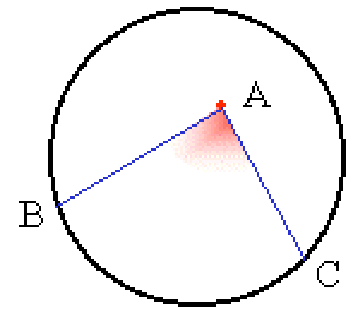



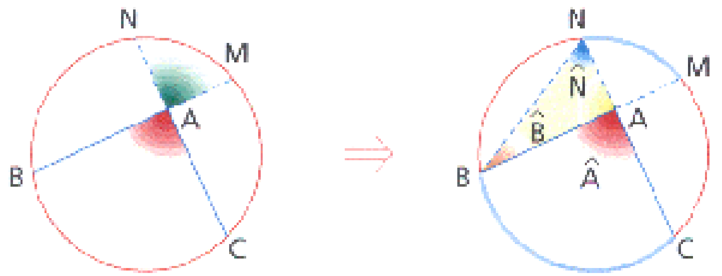

**La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que abarca.**

# Ángulos interiores

En una circunferencia se toma un punto A, interior a ella. Si desde A trazamos semirrectas, por ejemplo AB y AC, el ángulo BAC se llama **ángulo interior**.

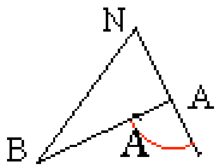



Si el ángulo BAC mide $\hat{A}$, ¿qué relación existe entre este valor y las medidas de los arcos que abarcan el ángulo y su opuesto?




Se une el punto N con B.

En el triángulo ABN se cumple:




$$\hat{A} = \hat{N} + \hat{B}$$

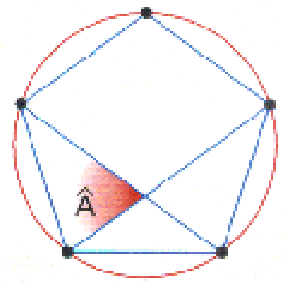
Por ser N y B ángulos inscritos, miden la mitad del arco que abarcan:

$$\hat{N} = \frac{\text{arco BC}}{2} \qquad \hat{B} = \frac{\text{arco MN}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{N} + \hat{B} = \frac{\text{arco BC} + \text{arco MN}}{2}$$

**La medida de un ángulo interior es igual a la mitad de la suma de los arcos que abarcan él y sus opuesto.**

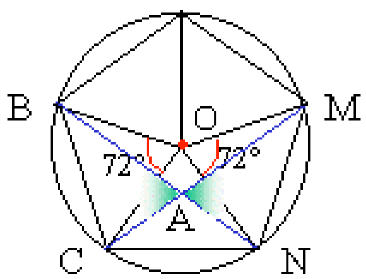
# Ángulos interiores. Ejercicio

Calcula el ángulo interior señalado en la siguiente figura sabiendo que el polígono inscrito es un pentágono regular.




Observamos que el opuesto de A vale lo mismo que A.

Por ser un pentágono regular, cada uno de los cinco ángulos centrales mide 72º.

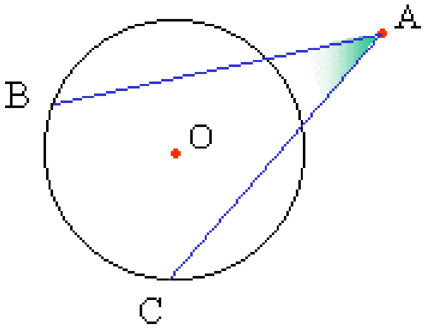


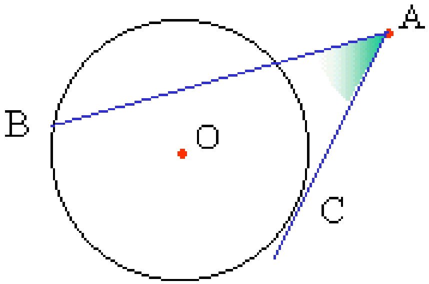

Por la propiedad vista:

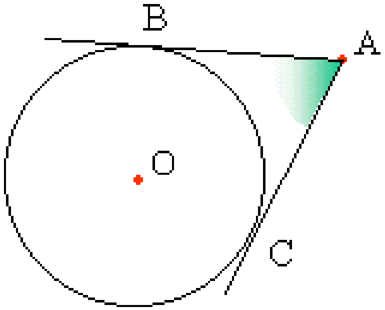
$$\hat{A} = \frac{\text{arco BC} + \text{arco MN}}{2} = \frac{72°+72°}{2} = 72°$$

# Ángulos exteriores

Tomamos una circunferencia y un punto exterior A. Si desde A trazamos semirrectas, secantes o tangentes a la circunferencia, por ejemplo AB y AC, el ángulo BAC se llama **ángulo exterior.**



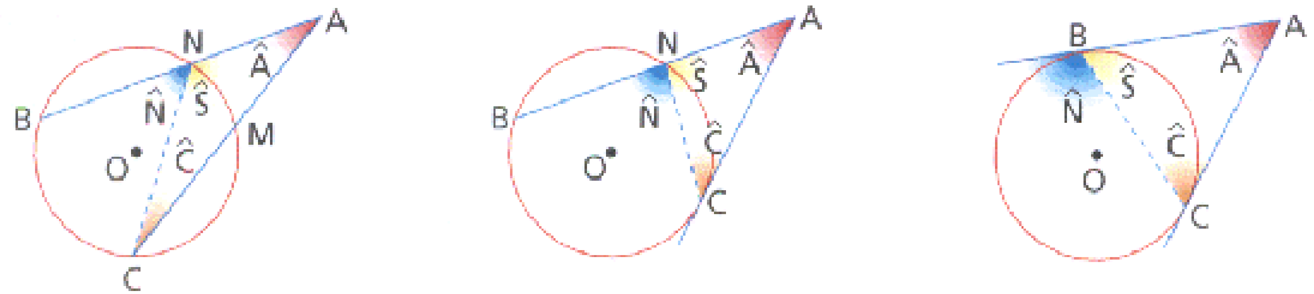



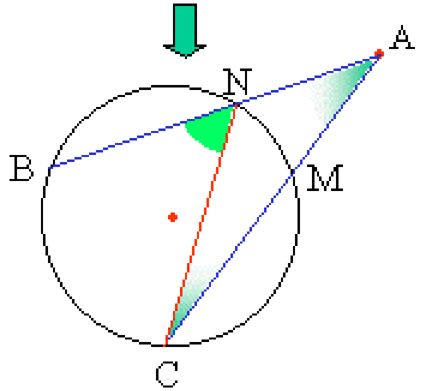

Ángulo exterior a una circunferencia es aquel que tiene su vértice en un punto fuera del círculo y sus lados son secantes o tangentes a la circunferencia.

# Medida de un ángulo exterior

La medida de un ángulo exterior se obtiene utilizando la medida del ángulo inscrito.

El razonamiento es idéntico para los tres casos que ilustran la figura.




Se une C con N. El triángulo CNA cumple que:

$$\hat{N} = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = \hat{N} - \hat{C}$$

$$\hat{N} = \frac{\text{arco BC}}{2} \qquad \hat{C} = \frac{\text{arco MN}}{2}$$

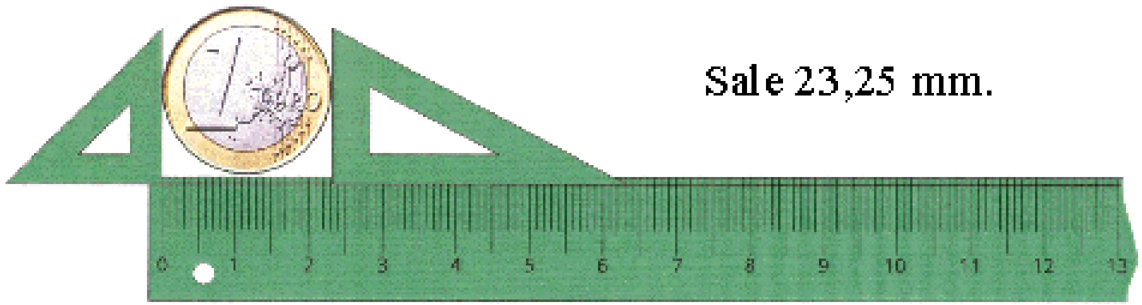
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{N} - \hat{B} == \frac{\text{arco BC} - \text{arco MN}}{2}$$

**La medida de un ángulo exterior es igual a la mitad de la diferencia de los arcos que abarcan el ángulo.**

# Longitud de la circunferencia

Aquí tienes una moneda de un euro. Vamos a calcular la longitud de su circunferencia sin necesidad de medir su contorno.

Para ello medimos su diámetro con ayuda de una regla una escuadra y un cartabón.




Sale 23,25 mm.

Como la longitud de la circunferencia (L) dividida por el diámetro da el número π, se tiene que:

$$\frac{L}{23{,}25} = 3{,}14 \quad \Rightarrow \quad L = 3{,}14 \times 23{,}25 = 73{,}005$$

Para cualquier otra circunferencia de diámetro d o radio r, tenemos:

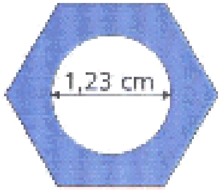
$$\frac{L}{d} = \pi \quad \Rightarrow \quad L = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi r$$

La longitud de una circunferencia se calcula con la fórmula: $L = d\pi = 2\pi r$

# La longitud de la circunferencia. Ejercicios

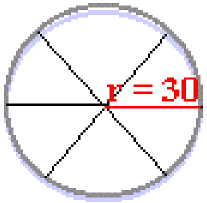
La longitud de una circunferencia se calcula con la fórmula: $L = d\,\pi = 2\,\pi r$

**Ejercicio 1.** Calcula la longitud de la circunferencia de esta tuerca.




$$L = d\pi = 1{,}23 \cdot 3{,}14 = 3{,}8622 \text{ cm}$$

**Ejercicio 2.** El radio de una rueda de una bicicleta mide 30 cm. ¿Cuánto avanza en cada vuelta?

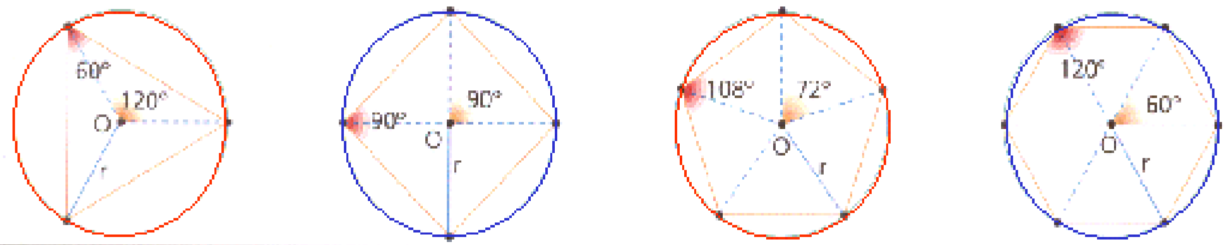



Avanza lo que mide la longitud de su circunferencia:

$$L = d\pi = 2\,\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 188{,}4 \text{ cm} = 1{,}884 \text{ m.}$$

# Longitud de un arco de circunferencia (I)

En las siguientes figuras aparecen los cuatro polígonos regulares inscritos en una circunferencia.




| Triangulo regular | Cuadrilátero regular | Pentágono regular | Hexágono regular |
|---|---|---|---|
| Arco y ángulo central: | Arco y ángulo central: | Arco y ángulo central: | Arco y ángulo central: |
| 360° : 3 = 120° | 360° : 4 = 90° | 360° : 5 = 72° | 360° : 6 = 60° |

En cada uno de los polígonos anteriores, la circunferencia se ha dividido en arcos iguales: En tres de 120°; En cuatro de 90°; En cinco de 72°; En seis de 60°.

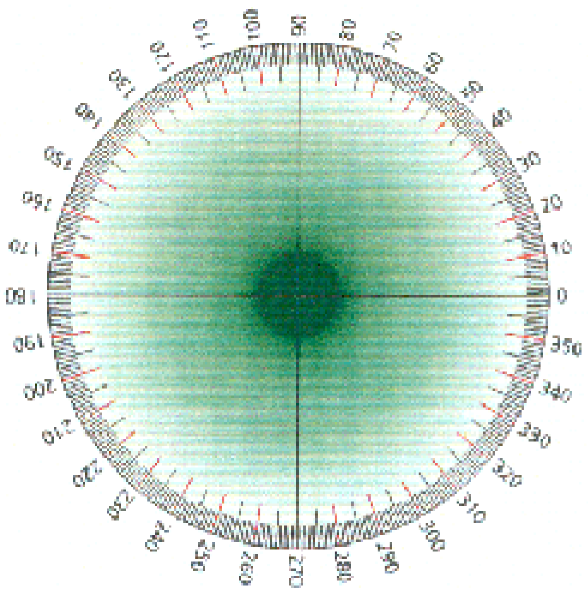
Si la circunferencia tiene una longitud de 60 cm, cada uno de los arcos mediría:

$\frac{1}{3}$ de 60 cm = 20 cm | $\frac{1}{4}$ de 60 cm = 15 cm | $\frac{1}{5}$ de 60 cm = 12 cm | $\frac{1}{6}$ de 60 cm = 10 cm

Observa que la medida de un arco es proporcional al número de grados que abarca. Así, a un arco de 120° le corresponde doble longitud que a un arco de 60°.

# Longitud de un arco de circunferencia (II)

En esta figura la circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales. Cada una de estas partes recibe, por definición, el nombre de grado.



Para calcular la longitud del arco de circunferencia que corresponde a un grado, dividimos la longitud de la circunferencia entre 360:

$$L_{\text{arco de } 1^\circ} = \frac{2\pi r}{360}$$

Si el arco de circunferencia midiera n grados, n°, su longitud sería:

$$L_{\text{arco de } n^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{2\pi r \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

**Ejemplo**: La longitud de un arco de 120° de una circunferencia de 6 cm de radio es:

$$L_{\text{arco de } 120^\circ} = \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{12\pi}{3} = 12{,}56$$

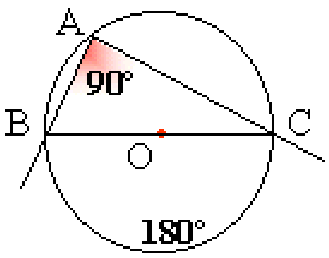
# Resolución de problemas (I)

Para trazar perpendiculares: Utilizar el ángulo inscrito.

## Ángulo inscrito recto

Trazamos una circunferencia y en ella un diámetro.

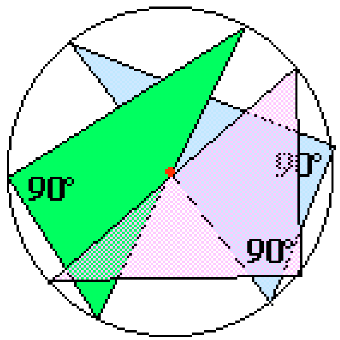
Con vértice en cualquier punto A, construimos un ángulo inscrito que pase por los extremos del diámetro.




Como el arco BC mide 180°, el ángulo inscrito $\hat{A}$ valdrá 90°.

## Generalización

Todos los triángulos inscritos en una circunferencia y que tengan por uno de sus lados un diámetro de ella, son rectángulos.

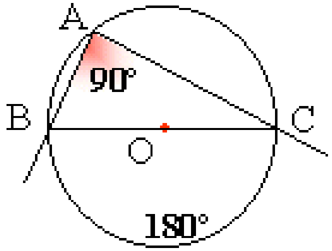



En consecuencia, las rectas de los otros dos lados son perpendiculares.

# Resolución de problemas (II)

Para trazar perpendiculares: Utilizar el ángulo inscrito.

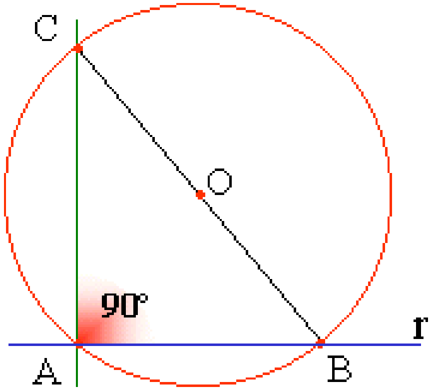
## Construcción de rectas perpendiculares




El triángulo ABC es rectángulo. En consecuencia, las rectas AB y AC son perpendiculares.

Para trazar dos rectas perpendiculares sigue la secuencia:

1. Se traza la recta r y en ella un punto A.
2. Con centro en O, exterior a la recta r, se traza una circunferencia de radio OA que corta a la recta en B.
3. Se traza el diámetro de extremo B. El otro extremo es el punto C.
4. Se traza finalmente la recta CA.




La recta CA es perpendicular a la recta r por el punto A.