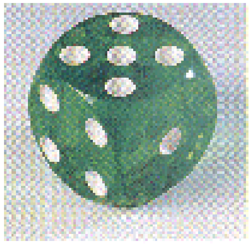
Experimentos aleatorios

Un **experimento es aleatorio** cuando no se puede predecir el resultado que se va a obtener al realizarlo.

Ejemplos:

1. Lanzamiento de un dado.

Se obtiene un resultado desde el 1 al 6, pero siempre impredecible.



2. Lanzar una moneda. Se obtiene cara o cruz.

3. Extraer una carta de una baraja. Se obtiene cualquier carta de la baraja.

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, y se designa por E.

En el caso del dado el espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

En el caso de la moneda el espacio muestral es: $E = \{C, X\}$

En el caso de la baraja, E = {todas las cartas de la baraja}

Sucesos aleatorios

En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 el espacio muestral es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Algunos subconjuntos de E son:

Salir par: $\longrightarrow$ $A = \{2, 4, 6\}$

Salir impar: $\longrightarrow$ $B = \{1, 3, 5\}$

Salir múltiplo de 3: $\longrightarrow$ $C = \{3, 6\}$

Salir cinco: $\longrightarrow$ $D = \{5\}$

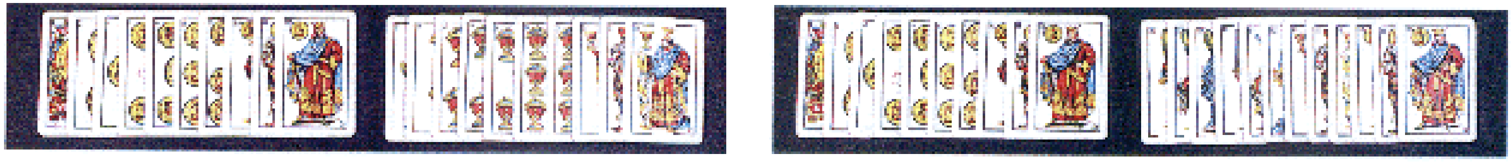
A los subconjuntos del espacio muestral se les llama **sucesos**.
Se designa poniendo entre llaves los resultados que lo componen.

El suceso salir 7 es **imposible**, pues nunca puede realizarse..

El suceso sacar un número del 1 al 6 es **seguro**, pues siempre se realiza.

Sucesos compatibles e incompatibles

Consideremos una baraja española.



Si se extrae una sola carta, no puede ser a la vez un oro y una copa.

Los sucesos {extraer oro} y {extraer copa} son **incompatibles**.

Si se extrae una sola carta, puede ser a la vez un oro y una figura. Por ejemplo, el caballo de oros.

Los sucesos {extraer oro} y {extraer figura} son **compatibles**.

> Dos **sucesos** son **incompatibles** si no se pueden verificar a la vez.
> En caso contrario, los **sucesos** son **compatibles**.

Otros ejemplos:

Incompatibles: → {extraer 5} y {extraer figura}

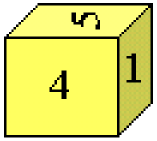
Compatibles: → {extraer 5} y {extraer basto}

Sucesos contrarios

Consideremos un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

Los sucesos:

A = "salir par" = $\{2, 4, 6\}$ y
$\overline{A}$ = "salir impar" = $\{1, 3, 5\}$
son incompatibles.



Además, entre los dos forman el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

> Dos sucesos que cumplan esas dos condiciones se llaman **contrarios**.

Otros ejemplos:

Para una baraja: A = {salir rey} $\xrightarrow{\text{contrario}}$ $\overline{A}$ = {no salir rey}

Para una baraja: B = {salir oro} $\xrightarrow{\text{contrario}}$ $\overline{B}$ = {no salir oro}

Para una moneda: A = {salir cara} $\xrightarrow{\text{contrario}}$ $\overline{A}$ = {salir cruz}

Para un dado: $A = \{1, 2\}$ $\xrightarrow{\text{contrario}}$ $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

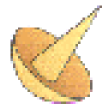
Sucesos equiprobables

Consideremos los siguientes experimentos.

Lanzar una moneda.

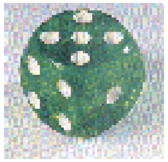
Es igual de probable obtener cara que cruz.

Lanzar una chincheta.



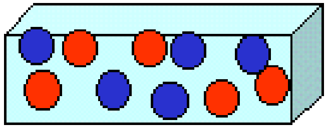
Es más probable que quede con la punta hacia arriba que con la punta hacia abajo.

Lanzar un dado.



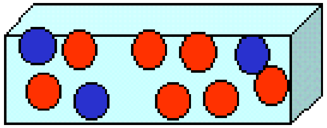
Es igual de probable obtener el 5 que el 6.

Se extrae una bola.



Es igual de probable obtener bola roja que azul.

Se extrae una bola.



Es más probable obtener bola roja que azul.

Sucesos equiprobables son los que tienen la misma probabilidad.

Regla de Laplace

Para un viaje fin de curso los alumnos han organizado una tómbola con 1 000 papeletas. Juan ha comprado una papeleta y Marta ha comprado 4.

Como todos los números son equiprobables y Juan tiene 1 papeleta de las 1 000 vendidas, diremos que tiene una oportunidad entre 1 000 de ganar.

$$\text{La probabilidad de ganar Juan} = \frac{1}{1000}$$

$$\text{Como Marta tiene 4 papeletas, la probabilidad de ganar Marta} = \frac{4}{1000}$$

Regla de Laplace

Si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables se verifica que:

$$\text{probabilidad del suceso A} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles}}$$

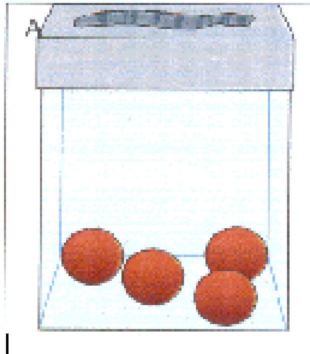
Ejemplos:

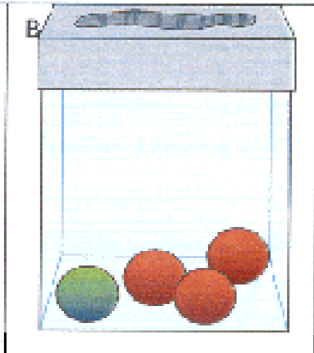
1º. Para un dado: → $p(\text{múltiplo de } 2) = p(2, 4, 6) = \frac{3}{6}$

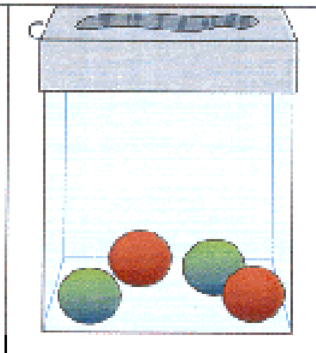
2º. Para una baraja de 40 cartas: → $p(\text{de obtener un rey}) = \frac{4}{40}$

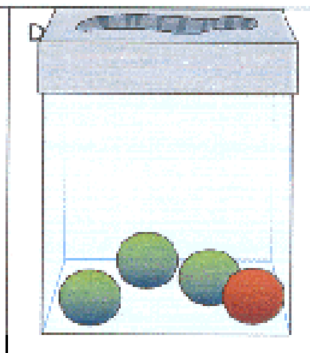
Escala de probabilidad

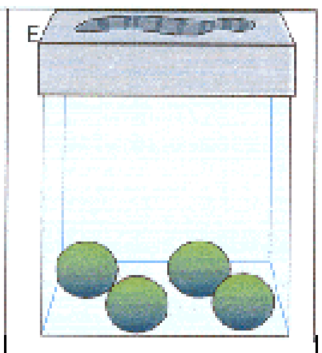
Si se extrae una bola sin mirar de las siguientes urnas, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?











Es imposible. Hay 0 oportunidades entre 4.	Hay 1 oportunidad entre 4.	Hay 2 oportunidades entre 4.	Hay 3 oportunidades entre 4.	**Es seguro**. Hay 4 oportunidades entre 4.
$p(verde) = \frac{0}{4} = 0$	$p(verde) = \frac{1}{4} = 0{,}25$	$p(verde) = \frac{2}{4} = 0{,}5$	$p(verde) = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$p(verde) = \frac{4}{4} = 1$

La probabilidad del suceso imposible es 0.

La probabilidad de un suceso cualquiera es un número comprendido entre 0 y 1.

La probabilidad del suceso seguro es 1.

Probabilidad del suceso contrario

EJEMPLO 1

En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, consideramos el suceso A = {salir múltiplo de 3}; entonces se verifica:

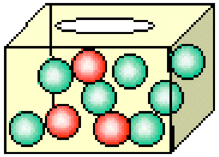
$A = \{\text{salir múltiplo de } 3\} = \{3, 6\} \longrightarrow p(A) = \frac{2}{6}$

$\bar{A} = \{\text{no salir múltiplo de } 3\} = \{1, 2, 4, 5\} \longrightarrow p(\bar{A}) = \frac{4}{6}$

Observa que: $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ O bien que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

EJEMPLO 2

En la urna de la figura hay 3 bolas rojas y 7 verdes. Calcula las probabilidades del suceso A = {extraer bola roja} y de su contrario.



$A = \{\text{extraer bola roja}\} \longrightarrow p(A) = \frac{3}{10}$

$\bar{A} = \{\text{no extraer bola roja}\} \longrightarrow p(\bar{A}) = \frac{7}{10}$

Observa que: $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ O bien que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

La probabilidad del suceso contrario de A es: $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Ejercicio propuesto

Se extrae al azar una carta de una baraja española.

a) Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

A = {sacar rey}; B = {sacar oro}; C = {sacar caballo}; D = {sacar as}

b) Halla la probabilidad de los sucesos contrarios.

En todos los sucesos hay **40** casos posibles.

Suceso	Casos favorables	Probabilidad	Probabilidad del suceso contrario
A = {sacar rey}	Hay **4** reyes	$p(A)=\frac{4}{40}$	$p(\overline{A})=1-\frac{4}{40}=\frac{36}{40}$
B = {sacar oro}	Hay **10** oros	$p(B)=\frac{10}{40}$	$p(\overline{B})=1-\frac{10}{40}=\frac{30}{40}$
C = {sacar caballo}	Hay **4** caballos	$p(C)=\frac{4}{40}$	$p(\overline{C})=1-\frac{4}{40}=\frac{36}{40}$
D = {sacar as}	Hay **4** ases	$p(D)=\frac{4}{40}$	$p(\overline{D})=1-\frac{4}{40}=\frac{36}{40}$

Resolución de problemas

PROBLEMA

En la nevera de la cocina hay 6 refrescos de cola, 12 de naranja y 5 de limón. Cuando Ana iba a coger un refresco se fue la luz, y por tanto, lo tomó al azar. Halla las siguientes probabilidades:

a) Que sea de cola. b) Que sea de limón. c) Que sea de naranja.
d) Que sea de cola o de limón. e) Que no sea de limón.

Determinar el número total de casos del espacio muestral

Ese número es la suma de todos los refrescos: $6 + 12 + 5 = 23$

Determinar para cada suceso los casos favorables

Suceso	Cola	Limón	Naranja
Casos favorables	6	5	12

Los sucesos {cola o limón} y {no ser de limón} son especiales.

6 de cola + 5 de limón = 11 casos.

Es el suceso contrario de ser de limón.

Hacer los cálculos

$$p(\text{Cola}) = \frac{6}{23} \qquad p(\text{Limón}) = \frac{5}{23} \qquad p(\text{Naranja}) = \frac{12}{23}$$

$$p(\text{Cola o limón}) = \frac{6+5}{23} = \frac{11}{23} \qquad p(\text{No ser limón}) = 1 - \frac{5}{23} = \frac{18}{23}$$