

Relaciones dadas por tablas

El nivel de agua que se alcanza en un recipiente depende del tiempo que el grifo esté goteando.

Esta dependencia o relación se expresa en la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	Nivel de agua (cm)
0	0
15	10
30	14
45	17
60	19



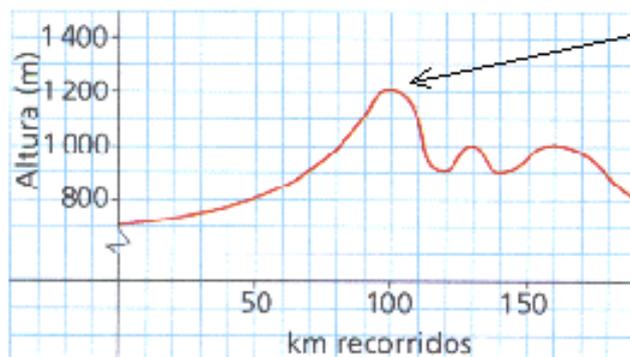
A la variable tiempo se le llama **variable independiente**, y a la variable nivel de agua, **variable dependiente**.

La dependencia entre dos variables puede expresarse mediante una tabla.

Relaciones dadas por gráficas

En una etapa de la vuelta ciclista, a cada distancia del punto de salida le corresponde una determinada altitud.

Esta dependencia o relación se expresa por la siguiente gráfica:



Cuando llevan 100 km recorridos es cuando están a mayor altitud.

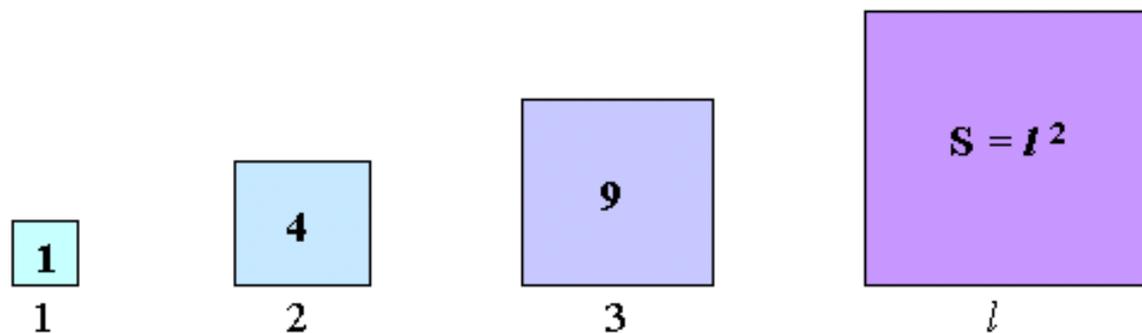
A la variable kilómetros recorridos se le llama **variable independiente**, y a la variable altura en metros, **variable dependiente**.

La dependencia entre dos variables puede expresarse mediante una gráfica.

Relaciones dadas por fórmulas

Si se conoce el lado de un cuadrado se puede obtener su área.

Esta dependencia o relación se expresa en la siguiente fórmula: $S = l^2$.



A la variable lado l se le llama **variable independiente**, y a la variable área, **variable dependiente**.

La dependencia entre dos variables puede expresarse mediante una fórmula.

Si dos magnitudes son dependientes podemos expresar esta dependencia mediante: a) una tabla; b) una gráfica; c) una fórmula.

Concepto de función

Todas las relaciones vistas anteriormente tienen una característica común:
A cada valor de la variable independiente le corresponde **un solo valor** de la variable dependiente.

A cada minuto le corresponde un único nivel de agua del recipiente.

A cada kilómetro le corresponde una única altitud.

A cada lado del cuadrado le corresponde una única área.

A las relaciones de este tipo las llamamos funciones.

- **Función:** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, que llamamos **imagen** o **transformado**.
- **Variable independiente:** la que se fija previamente.
- **Variable dependiente:** la que se deduce de la variable independiente.

Concepto de función. Ejemplo

- **Función:** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, que llamamos **imagen** o **transformado**.
- **Variable independiente:** la que se fija previamente.
- **Variable dependiente:** la que se deduce de la variable independiente.

La fórmula $f(x) = 3x^2 + 1$ define una función.

$$f(x) = 3x^2 + 1$$



$f(x)$ es la variable dependiente



x es la variable independiente

Fijada la variable independiente, por ejemplo $x = 5$, el valor que toma la variable dependiente es $f(5) = 3 \cdot 5^2 + 1 = 76$.

(La imagen de 5 es 76; y es única, pues la operación $3 \cdot 5^2 + 1$ es única.)

Si $x = 0$, $f(0) = 1$. Si $x = 1$, $f(1) = 4$. Si $x = -2$, $f(-2) = 13$.

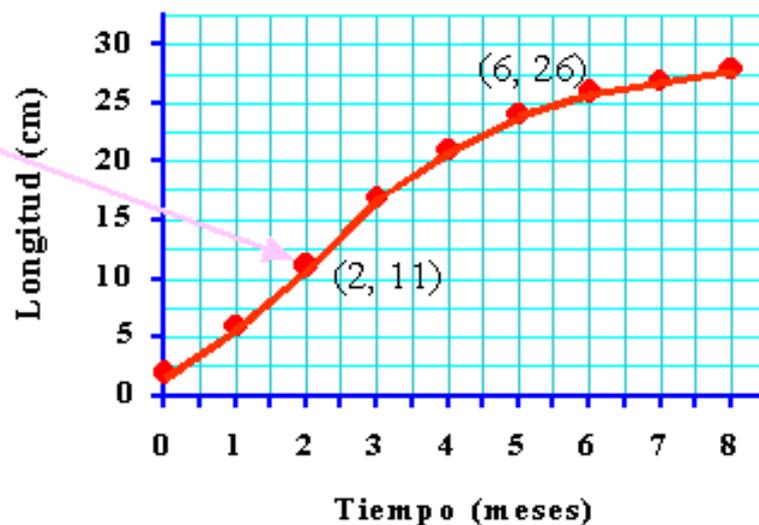
Representación gráfica de funciones (I)

La planta de María ha ido creciendo con el tiempo según se indica en la tabla:

Tiempo (meses)	Longitud (cm)
0	2
1	6
2	11
3	17
4	21
5	24
6	26
7	27
8	28

Para representarla gráficamente:

representamos los pares de valores sobre unos ejes de coordenadas y obtenemos distintos puntos de la gráfica.



Uniendo los puntos se obtiene la gráfica de la función.

Representación gráfica de funciones (II)

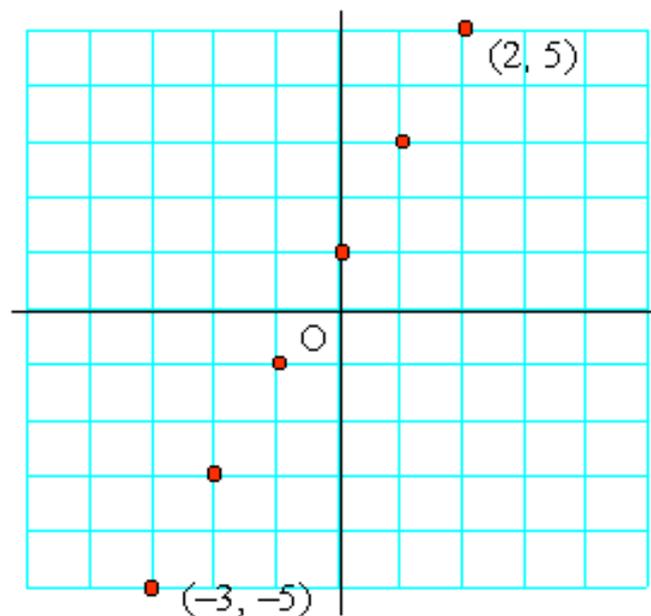
Consideremos la función f que asigna a cada número entero el doble más 1.
Es decir, $f(x) = 2x + 1$.

Para representarla gráficamente:

1. Formamos la tabla de valores.
2. Representamos los pares de valores sobre unos ejes de coordenadas

x	y = f(x)
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

En este caso no se pueden unir los puntos ya que la función está definida únicamente para los números enteros.



Función lineal o de proporcionalidad directa

Al comprar en el supermercado un trozo de queso nos hemos fijado en la etiqueta del paquete que reproducimos:

Peso en kg	Precio por kg en €	Total en €
0,820	5,12	4,20

Las magnitudes precio y peso son **directamente proporcionales**.

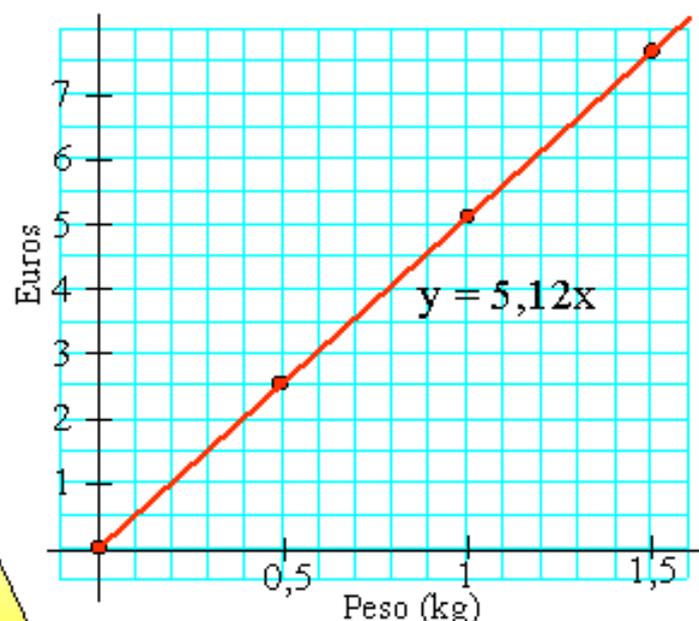
Si x es el peso en kg, e y el precio, la expresión que da el precio en euros es $y = 5,12x$.

Calculamos valores, representamos y unimos los puntos.

Las funciones se la forma $y = mx$ se llaman **funciones lineales**.

Son rectas que pasan por el origen.

• m es la pendiente o inclinación de la recta.



Función lineal. Ejercicio

Representa las siguientes funciones: a) $y = x$; b) $y = -5x$; c) $y = 2x$; d) $y = -x$

$$y = x$$

$$x \rightarrow y$$

$$1 \rightarrow 1$$

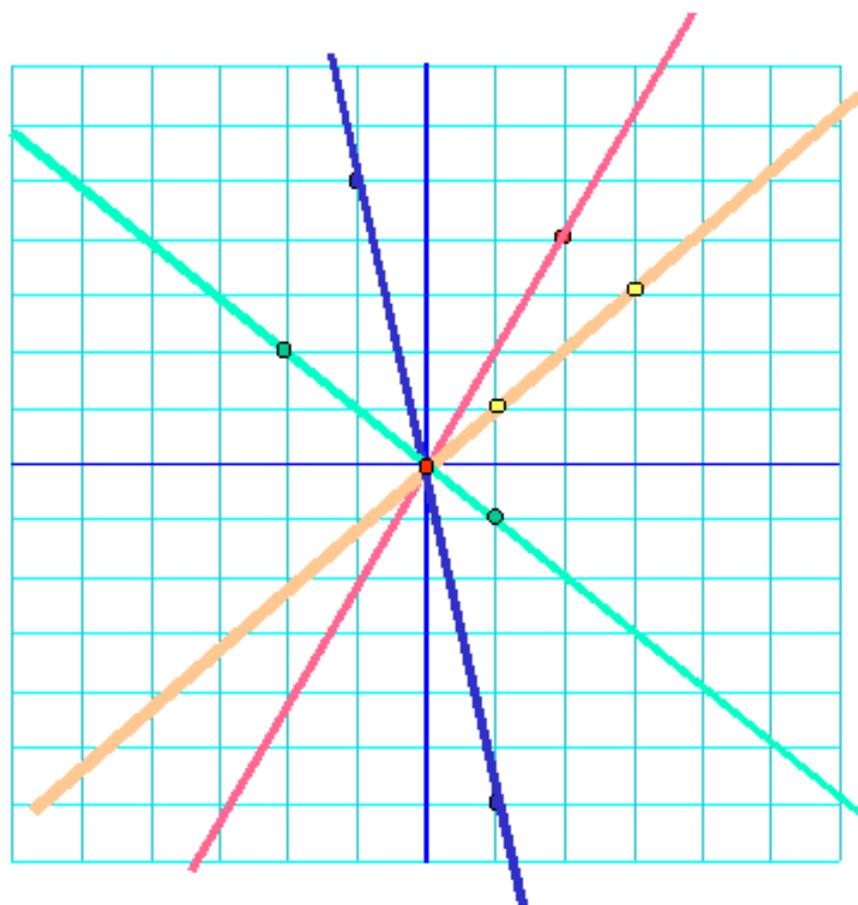
$$3 \rightarrow 3$$

$$y = 2x$$

$$x \rightarrow y$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 4$$



$$y = -5x$$

$$x \rightarrow y$$

$$-1 \rightarrow 5$$

$$1 \rightarrow -5$$

$$y = -x$$

$$x \rightarrow y$$

$$1 \rightarrow -1$$

$$-2 \rightarrow 2$$

Funciones afines

Cuando un espeleólogo se adentra hacia el interior de la tierra, la temperatura aumenta con arreglo a la siguiente fórmula:

$$t = 0,01 d + 15, \quad (t \text{ es la temperatura en } ^\circ\text{C}; d, \text{ la profundidad en m})$$

Formamos la tabla de valores:

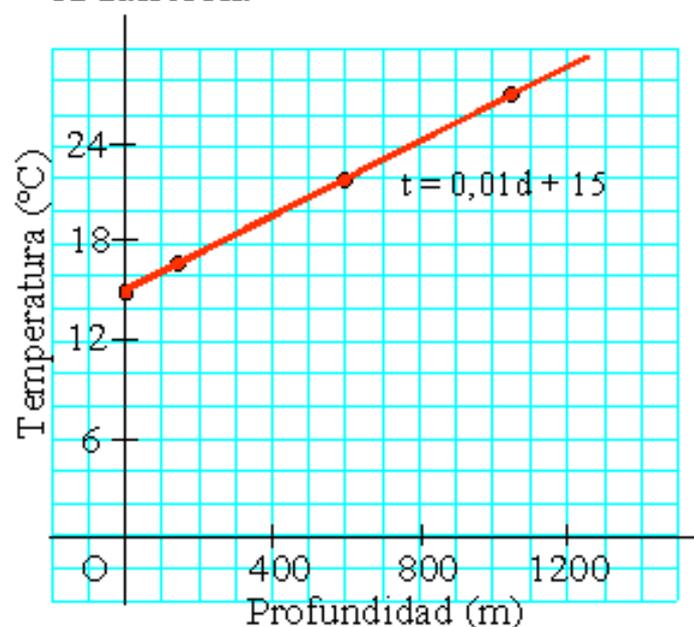
d	t
0	15
150	16,5
600	21
1050	25,5
...	...

Las funciones de la forma $y = mx + n$ ($n \neq 0$) se llaman **funciones afines**.

Son rectas que no pasan por el origen.

- **m** es la pendiente o inclinación de la recta.
- **n** es la ordenada para $x = 0$, y se llama ordenada en el origen.

Representamos gráficamente la función:



Funciones afines. Ejercicio

Representa las siguientes funciones:

a) $y = x + 1$; b) $y = x - 3$; c) $y = 2x + 3$; d) $y = 2x - 4$

$$y = x + 1$$

$$x \rightarrow y$$

$$0 \rightarrow 1$$

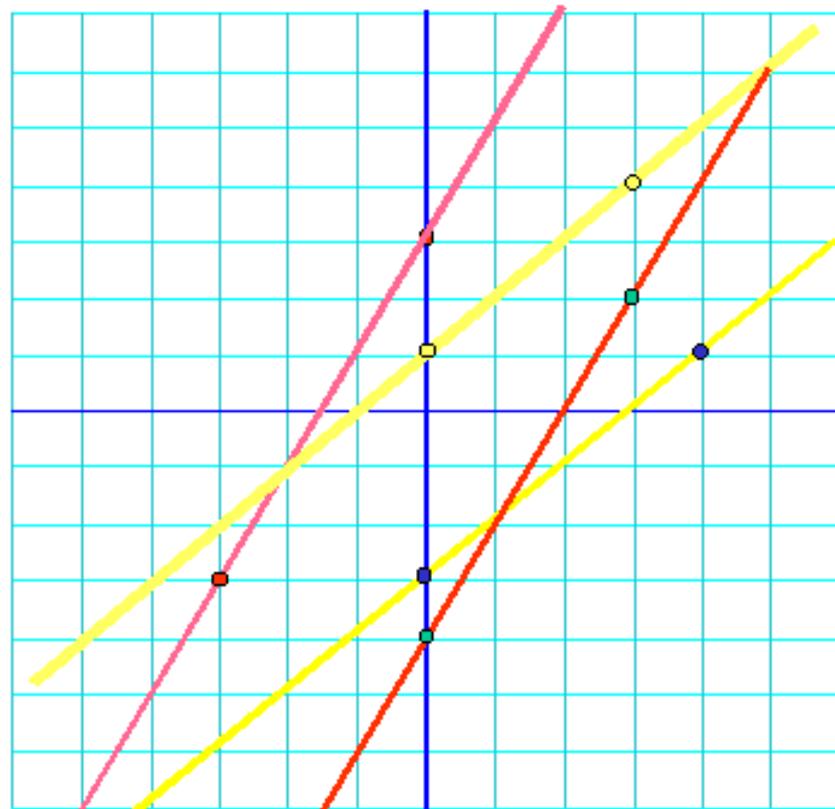
$$3 \rightarrow 4$$

$$y = 2x + 3$$

$$x \rightarrow y$$

$$0 \rightarrow 3$$

$$-3 \rightarrow -3$$



$$y = x - 3$$

$$x \rightarrow y$$

$$0 \rightarrow -3$$

$$4 \rightarrow 1$$

$$y = 2x - 4$$

$$x \rightarrow y$$

$$0 \rightarrow -4$$

$$3 \rightarrow 2$$

Función de proporcionalidad inversa (I)

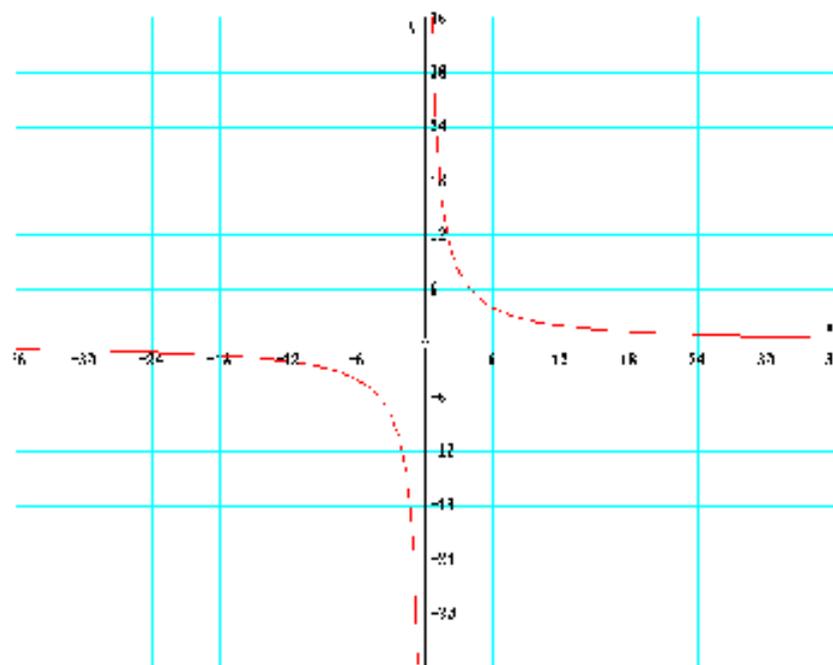
Si el producto de dos números es 24, ¿qué valores pueden tomar esos números?

$$x \cdot y = 24 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{24}{x}$$

Formamos la tabla de valores:

x	$y = \frac{24}{x}$
2	12
4	6
6	4
12	2
-12	-2
-6	-4
-4	-6
-2	-12

Representamos los pares obtenidos y unimos los puntos:



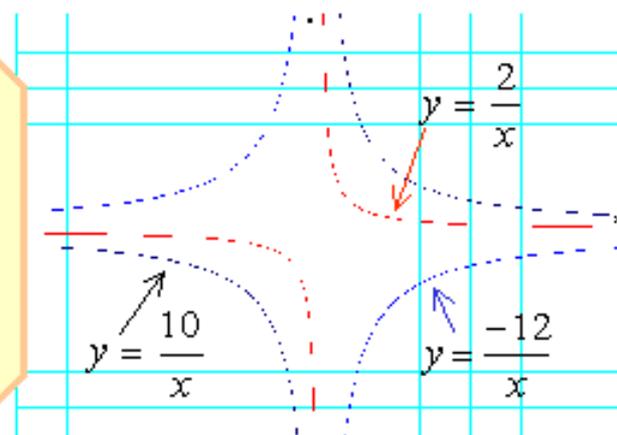
Función de proporcionalidad inversa (II)

Si el producto de los valores correspondientes de dos magnitudes x e y es constante, se dice que las magnitudes son inversamente proporcionales.

$$x \cdot y = k \quad \text{o bien} \quad \rightarrow \quad y = \frac{k}{x}$$

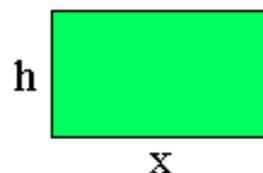
Las funciones de la forma $y = \frac{k}{x}$ se llaman funciones de proporcionalidad inversa.

La gráfica de las funciones de proporcionalidad inversa se llama **hipérbola**.



Funciones cuadráticas (I)

Con una cuerda de 40 cm se pueden formar distintos rectángulos. ¿Cuánto valdrá su área?



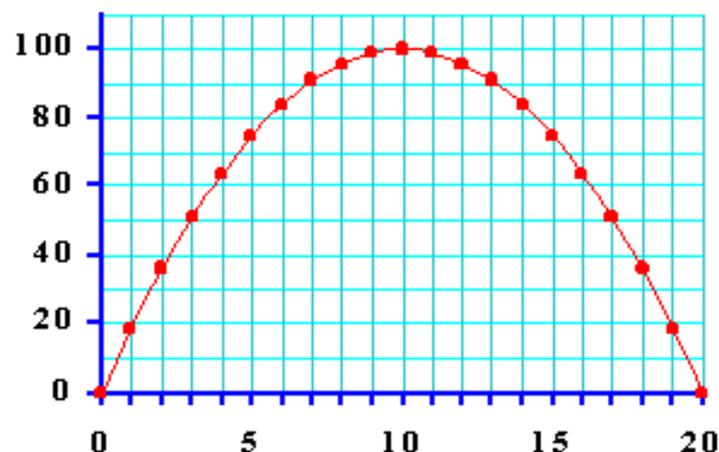
Perímetro: $2x + 2h = 40 \Rightarrow x + h = 20 \Rightarrow h = 20 - x$

Área: $A = xh = x(20 - x) \Rightarrow A = 20x - x^2$

Formamos la tabla de valores:
(al área le llamamos y)

x	y
1	19
3	51
8	96
10	100
12	96
14	84
17	51
19	19

Representamos los pares obtenidos:



Unimos los puntos y se obtiene la gráfica.

Funciones cuadráticas (II)

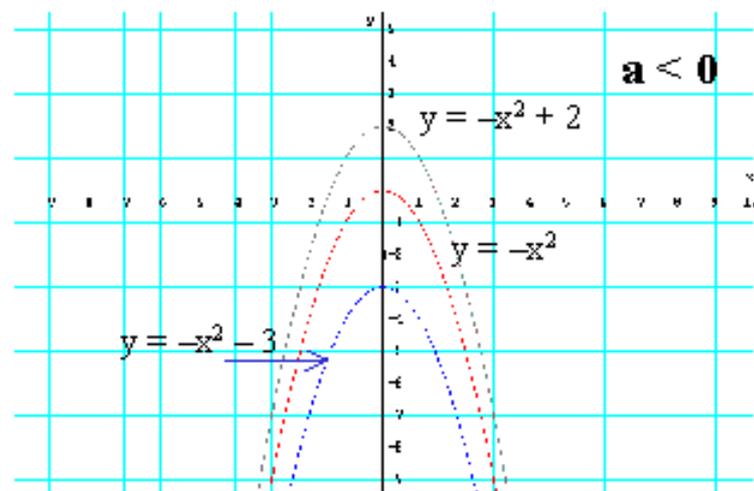
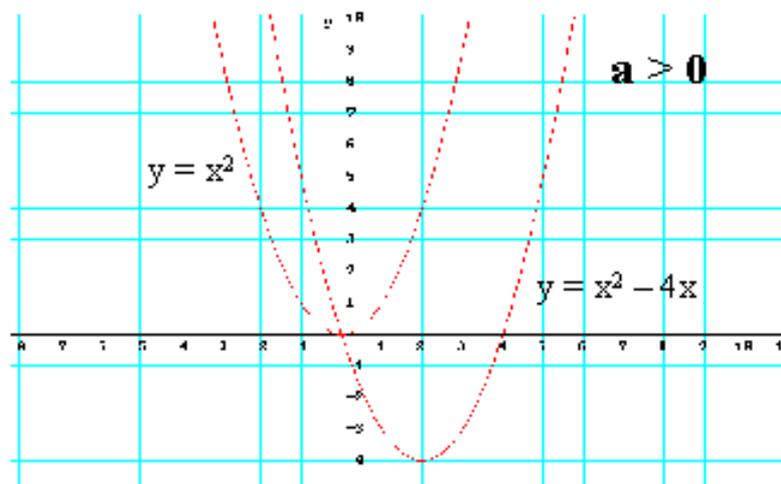
Las funciones $y = 20x - x^2$, vista anteriormente, se llama **función cuadrática**.

Las **funciones cuadráticas** son de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

La gráfica de las funciones cuadráticas se llama **parábola**.

Si $a > 0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a < 0$ la parábola está abierta hacia abajo.



Resolución de problemas

PROBLEMA

Una función afín pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-2, 3)$.

- a) Halla la ecuación de la función. b) ¿Qué valor toma la función cuando $x = 4$?
c) Representa la función.

➤ Buscar un modelo

a) Es la función afín, $y = mx + n$, cuya gráfica es una recta.

Como los puntos dados son de la recta, deben cumplir su ecuación, luego:

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2) \text{ es de la recta: si } x = 1, y = 2 \quad \longrightarrow \quad 2 = m + n \\ B(-2, 3) \text{ es de la recta: si } x = -2, y = 3 \quad \longrightarrow \quad 3 = -2m + n \end{array} \right\}$$

➡ Resolviendo el sistema: $m = -\frac{1}{3}, n = \frac{7}{3}$ ➡ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

➤ Trabajar a partir del modelo

b) Sustituimos en la función $x = 4$:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{7}{3} = \frac{-4 + 7}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

c) Representado los puntos dados se obtiene la recta adjunta.

