Proporcionalidad

- Razón entre dos números

La razón entre los números 10 y 2 es 5, ya que: $\frac{10}{2} = 5$

Razón entre dos números a y b es el cociente $\frac{a}{b}$

- Proporcionalidad numérica

Los números 2, 5 y 8, 20 forman una **proporción**, pues sus razones son iguales. → Es decir: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

Los números a, b y c, d forman una **proporción** si la razón entre a y b es la misma que entre c y d.

Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ← Se lee "**a es a b como c es a d**"

Productos cruzados. Ejercicio

Si los números a, b y c, d forman una proporción, se verifica que el producto de extremos es igual al producto de medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$$

A **a** y **d** se les llama **extremos**.
A **b** y **c** se les llama **medios.**

EJERCICIO RESUELTO

¿Qué valor ha de tener x para que $\frac{3}{x}$ y $\frac{27}{18}$ formen una proporción?

El producto de los medios debe ser igual al producto de los extremos.

$$\frac{3}{x} = \frac{27}{18} \Rightarrow 3 \cdot 18 = x \cdot 27 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 18}{27} = 2$$

Tanto por ciento o porcentaje

En las rebajas de enero una tienda de ropa hace el 20% de descuento.
¿Cuánto nos descontarán por un jersey que antes de las rebajas costaba 30 €?

Un descuento del 20% quiere decir que de cada 100 € nos descuentan 20 €.

Para calcularlo puede procederse así:

Precio antes de las rebajas: 30 €

Descuento del 20%: → 20% de 30 € $= \frac{20}{100} \cdot 30 = 6$ €

O bien: → 20% de 30 € $= 0{,}20 \cdot 30 = 6$ €

En el jersey nos descuentan 6 €.

> Para calcular un tanto por ciento o porcentaje de una cantidad:
>
> · Multiplicamos la cantidad por la fracción equivalente al porcentaje, o bien
>
> · Multiplicamos la cantidad por el número decimal equivalente al porcentaje.

Porcentajes y descuentos

¿Cuánto debemos pagar por un jersey que cuesta 30 € si nos hacen un 20% de descuento?

Precio antes de las rebajas: 30 €

Descuento del 20%: → $0{,}20 \cdot 30$ €

Precio después de las rebajas: → $30 - 0{,}20 \cdot 30 = 30\,(1 - 0{,}20) =$
$= 30 \cdot 0{,}80 = 24$ €.

> Para hallar el precio final de un artículo que tiene un r% de descuento, se multiplica el precio inicial del artículo por $\left(1 - \dfrac{r}{100}\right)$

EJEMPLO. ¿Cuánto pagaremos por un coche que cuesta 12020 € si nos hacen un 7% de descuento?

$$7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$$

Pagaremos: $12020 \cdot (1 - 0{,}07) = 12020 \cdot 0{,}93 = 11178{,}60$ €.

Porcentajes e incrementos

Una bicicleta cuesta 150 euros más un 16% de IVA. ¿Cuánto deberemos pagar?

Un incremento del 16% significa que por cada 100 € debemos pagar 16 € más.

Precio inicial → 150 €

Impuesto del 16%: → 0,16 · 150 €

Precio final: → 150 + 0,16 · 150 = 150 · (1 + 0,16) =
= 150 · 1,16 = 174 €.

Para hallar el precio final de un artículo que tiene un r% de incremento, se multiplica el precio inicial del artículo por $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

Proporcionalidad y cambio de moneda

1 € = 166,386 PTA

a) ¿A cuántas pesetas equivalen 11 €?

b) ¿Cuántos euros son 4000 PTA?

Para verlo con detalle, formamos la tabla:

Euros	1	2	...	11	...	?
Pesetas	166,386	332,772	...	?	...	4000

Para pasar de euros a pesetas se multiplica por 166,386

$11 \cdot 166{,}386 = 1830{,}246$

Redondeamos a la unidad → 11 € = 1830 PTA

Para pasar de pesetas a euros se divide por 166,386

$4000 : 166{,}386 = 24{,}04048$

Redondeamos a las centésimas → 4000 PTA = 24,04 €

Regla de tres simple directa

Ejemplo. *Una máquina fabrica 400 clavos en 5 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará para hacer 1000 clavos?*

Las magnitudes número de clavos y número de horas son **directamente proporcionales**: en doble número de horas de fabricación se producirán doble número de clavos; en triple, triple, etc

Sabemos que:	En **5** horas se fabrican **400** clavos.
Nos pregunta:	En **x** horas se fabricarán **1000** clavos.

Disposición práctica

$$\left.\begin{array}{l} 5\ \text{h} \longrightarrow 400\ \text{clavos} \\ x\ \text{h} \longrightarrow 1000\ \text{clavos} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{5}{x} = \frac{400}{1000} \Longrightarrow x = \frac{5 \cdot 1000}{400} = 12{,}5$$

Se necesitan doce horas y media para fabricar 1000 clavos.

Método de reducción a la unidad

Un automóvil gasta 8 litros de gasolina cada 100 km. Si quedan 7 litros en el depósito, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el vehículo?

Las magnitudes litros de gasolina y número de kilómetros recorridos son **directamente proporcionales**: con doble número de litros de gasolina se recorrerán doble número de kilómetros; con triple, triple, etc

Sabemos que: Con **8** litros $\xrightarrow{\text{Se recorren}}$ **100** km.

Dividimos entre 8

Reducción a la unidad: Con **1** litro $\xrightarrow{\text{Se recorren}}$ $\frac{100}{8}$ km.

Multiplicamos por 7

Búsqueda del resultado: Con 7 litros $\xrightarrow{\text{Se recorrerán}}$ $7 \cdot \frac{100}{8}$ km = 87,5 km.

Luego con 7 litros se recorrerán 87,5 km.

Repartos directamente proporcionales

Juan, Luisa y Margarita tenían, respectivamente, 5, 3 y 2 euros. Compraron entre los tres un décimo de lotería que costó 10 euros y han obtenido un premio de 500 €. ¿Cómo deben repartirlo?

Los premios tienen que ser directamente proporcionales al dinero que gastó cada uno.

Si suponemos que **k** es la constante de proporcionalidad:

A Juan le corresponderá: $5 \cdot \mathbf{k}$

A Luisa le corresponderá: $3 \cdot \mathbf{k}$

A María le corresponderá: $2 \cdot \mathbf{k}$

A los tres les corresponde 500 €.

Ecuación: $5\,k + 3\,k + 2\,k = 500$

Operamos: $10\,k = 500 \implies k = 50$

Premio de Juan: **$5 \cdot 50 = 250$ €.**

Premio de Luisa: **$3 \cdot 50 = 150$ €.**

Premio de María: **$2 \cdot 50 = 100$ €.**

Comprobación

$250 + 150 + 100 = 500$

Regla de tres simple inversa

Ejemplo. *Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?*

Las magnitudes número de trabajadores y días empleados son **inversamente proporcionales**, ya que si trabajan el doble número de hombres tardarán la mitad de los días.

Sabemos que:	**3** hombres tardan **24** días.
Nos pregunta:	**18** hombres tardarán **x** días.

Disposición práctica

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3}\ \text{hombres} \longrightarrow \mathbf{24}\ \text{días} \\ \mathbf{18}\ \text{hombres} \longrightarrow \mathbf{x}\ \text{días} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 24 = 18 \cdot x \Rightarrow x = 4 \text{ días}$$

Luego 18 hombres realizarán el mismo trabajo en 4 días.

Método de reducción a la unidad

Un barco que navega a 24 km por hora ha tardado en hacer un recorrido 12 horas. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido otro barco que navega a 32 km por hora?

Las magnitudes velocidad del barco y número de horas de navegación son **inversamente proporcionales**, ya que a doble velocidad tardará la mitad de tiempo en hacer el mismo recorrido.

Sabemos que: A **24** km/h $\xrightarrow{\text{Tarda}}$ **12** horas

Dividimos entre 24

Reducción a la unidad: A **1** km/h $\xrightarrow{\text{Tardará}}$ 24 · 12 horas (24 veces más)

Multiplicamos por 32

Búsqueda del resultado: A **32** km/h $\xrightarrow{\text{Tardará}}$ $\dfrac{12 \cdot 24}{32} = 9$ horas (32 veces menos)

Luego a 32 km/h el barco tardará 9 horas.

Repartos inversamente proporcionales

Dos ciclistas se han de repartir 250 € en partes inversamente proporcionales al tiempo que han empleado en hacer el mismo recorrido. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno sabiendo que el primero tardó 3 horas y el segundo 5 horas?

Las magnitudes tiempo y dinero son inversamente proporcionales.

Si **k** es la constante de proporcionalidad:

Al primer ciclista le corresponderá: $\frac{k}{3}$

Al segundo ciclista le corresponderá: $\frac{k}{5}$

A los dos les corresponde 240 €.

Ecuación: $\frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 240 \Rightarrow \frac{5k + 3k}{15} = 240$

Operamos: $8\,k = 15 \cdot 240 \Rightarrow k = \frac{15 \cdot 240}{8} = 450$

El primer ciclista recibirá: $\frac{k}{3} = \frac{450}{3} = 150$ €

El segundo ciclista recibirá: $\frac{k}{5} = \frac{450}{5} = 90$ €

Comprobación

150 + 90 = 240

Regla de tres compuesta

Proporcionalidad directa

Ejemplo. ***Cuatro chicos, en una acampada de 10 días, han gastado en comer 250 €. En las mismas condiciones, ¿cuánto gastarán en comer 6 chicos durante una acampada de 15 días?***

· Las magnitudes chicos y dinero gastado son **directamente proporcionales**: doble número de chicos, en los mismos días, gastarán el doble.

· Las magnitudes número de días y dinero gastado son **directamente proporcionales**: doble número de días, los mismos chicos, gastarán el doble.

Así pues, el dinero gastado depende directamente del número de chicos y del número de días.

Este es un ejemplo de proporcionalidad compuesta (directa) de magnitudes.

Lo resolveremos por el método de reducción a la unidad.

Proporcionalidad directa. Método de reducción a la unidad

*Cuatro chicos, en una acampada de 10 días, han **gastado** en comer 250 €. En las mismas **condiciones**, ¿cuánto gastarán en comer 6 chicos durante una acampada de 15 días?*

Sabemos que:

$$\textbf{4 chicos} \xrightarrow{\text{en}} \textbf{10 días} \xrightarrow{\text{gastan}} \textbf{250 €}$$

Dividimos entre 4 y entre 10

Reducción a la unidad:

$$\textbf{1 chico} \xrightarrow{\text{en}} \textbf{10 días} \xrightarrow{\text{gastará}} \frac{250}{4} = 62{,}5 \text{ €}$$

$$\textbf{1 chico} \xrightarrow{\text{en}} \textbf{1 día} \xrightarrow{\text{gastará}} \frac{62{,}5}{10} = 6{,}25 \text{ €}$$

Multiplicamos por 6 y por 15

Búsqueda del resultado:

$$\textbf{6 chicos} \xrightarrow{\text{en}} \textbf{1 día} \xrightarrow{\text{gastarán}} 6 \cdot 6{,}25 = 37{,}5 \text{ €}$$

$$\textbf{6 chicos} \xrightarrow{\text{en}} \textbf{15 días} \xrightarrow{\text{gastarán}} 15 \cdot 37{,}5 = 562{,}5 \text{ €}$$

Por tanto, 6 chicos durante una acampada de 15 días gastarán 562,5 €.

Regla de tres compuesta

Proporcionalidad inversa

Ejemplo. ***15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?***

· Las magnitudes número de obreros y número de días son **inversamente proporcionales**: doble número de obreros, trabajando las mismas horas, tardarán la mitad de días en hacer el mismo trabajo.

· Las magnitudes número de horas diarias y número de días son **inversamente proporcionales**: el mismo número de obreros, trabajando doble número de horas diarias, tardarán la mitad de días.

Así pues, el número de días en realizar un trabajo depende inversamente del número de horas diarias trabajadas e inversamente del número de obreros.

Este es un ejemplo de proporcionalidad compuesta (inversa) de magnitudes.

Lo resolveremos por el método de reducción a la unidad.

Proporcionalidad inversa. Método de reducción a la unidad

Ejemplo. ***15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?***

Sabemos que: 15 obreros $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 6 horas diarias $\xrightarrow{\text{tardan}}$ 30 días

Multiplicamos por 15 y por 6

Reducción a la unidad:

1 obrero $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 6 horas diarias $\xrightarrow{\text{tarda}}$ $30 \cdot 15 = 450$ días

1 obrero $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 1 hora diaria $\xrightarrow{\text{tarda}}$ $450 \cdot 6 = 2700$ días

Dividimos entre 10 y entre 8

Búsqueda del resultado:

10 obreros $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 1 hora diaria $\xrightarrow{\text{tardarán}}$ $\dfrac{2700}{10} = 270$ días

10 obreros $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 8 horas diarias $\xrightarrow{\text{tardarán}}$ $\dfrac{270}{8} = 33{,}75$ días

Por tanto, 10 obreros empleando 8 horas diarias tardarán 33,75 días.

Interés simple

Ejemplo. *En la publicidad de un banco se dice: "Le damos un interés del 6% anual". Si ingresamos 1000 euros, ¿cuánto nos devolverán al final del año?*

Los 1000 € al 6% producen:

$$1000 \cdot \frac{6}{100} = 60 \text{ € de interés.}$$

Por tanto, nos devolverán los 1000 € que ingresamos más 60 € de intereses:

$$1000 + 60 = 1060 \text{ €}$$

En general, un capital C durante t años, al r% produce un interés i igual a:

$$i = \frac{C\,r\,t}{100}$$

EJEMPLO. El interés que producen 30000 € al 5,5% durante 4 años, es:

$$i = \frac{30000 \cdot 5{,}5 \cdot 4}{100} = 6600\text{€}$$