Ecuaciones con dos incógnitas

Dos grupos de alumnos han ido a merendar a una cafetería:

a) Elvira observa que el primer grupo por 3 bocadillos y 4 refrescos ha pagado 10 euros.

Si el precio de cada bocadillo es b y el cada refresco es r, se tendrá:

$$\mathbf{3b + 4r = 10}$$

Esta ecuación con dos incógnitas tiene muchas soluciones:

$$b = 2,\ r = 1;\ b = 1,\ r = 1{,}75;\ \ldots$$

b) Elvira observa que el segundo grupo por 1 bocadillo y 2 refrescos ha pagado 4 euros.

Se obtiene otra ecuación: $\mathbf{1b + 2r = 4}$

Esta otra ecuación también tiene muchas soluciones:

$$b = 3,\ r = 0{,}5;\ b = 2,\ r = 1;\ \ldots$$

La información dada por este par de ecuaciones se simboliza así:

$$\begin{cases} 3b + 4r = 10 \\ 1b + 2r = 4 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones de primer grado puede escribirse así:

$$\begin{cases} a x + b y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Los números a, b, a´, b´ se llaman coeficientes de las incógnitas.

Los números c y c´se llaman términos independientes.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Coeficientes:		Términos independientes
3	2	8
1	3	5

El coeficiente 1 no hace falta ponerlo: $1 \cdot x = x$

Resolución de sistemas por tablas

En un corral, entre conejos y gallinas se cuentan 17 cabezas y 56 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?

Si se designa por **c** el número de conejos y por **g** el número de gallinas, el sistema resultante es:

$$\begin{cases} \mathbf{c + g = 17} \\ \mathbf{4c + 2g = 56} \end{cases}$$ (Los conejos tienen 4 patas, las gallinas, 2.)

Una manera de resolver problemas sencillos de ecuaciones es dando valores a una incógnita, y a partir de ese valor comprobar si se cumplen las ecuaciones. Lo haremos mediante una tabla.

Conejos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
Gallinas	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	...
Patas	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	...

La solución es 11 conejos y 6 gallinas.

Los demás valores no verifican las dos ecuaciones.

Resolver un sistema con dos incógnitas es hallar los valores de las incógnitas que verifican a la vez las dos ecuaciones

Resolución de sistemas por sustitución

En un corral, entre conejos y gallinas se cuentan 17 cabezas y 56 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?

Si **c** es el número de conejos y **g** el de gallinas, el sistema resultante es:

$$\begin{cases} \mathbf{c + g = 17} \\ \mathbf{4c + 2g = 56} \end{cases}$$

De la primera ecuación, **c + g = 17**, se deduce que **g = 17 – c.**

Al sustituir ese valor de **g** en la segunda ecuación resulta:

$$4c + 2g = 56 \Longrightarrow 4c + 2(17 - c) = 56 \Longrightarrow 4c + 34 - 2c = 56$$

$$\Longrightarrow 2c = 56 - 34 \Longrightarrow 2c = 22 \Longrightarrow \mathbf{c = 11}$$

Si **c** = **11**, entonces, **g** = **17 – 11** = **6**.

En el corral hay 11 conejos y 6 gallinas.

Este modo de resolver sistemas de ecuaciones se llama método de sustitución.

Método de sustitución

Pasos a seguir:

1.º Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

2.º Sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

3.º Resolver la ecuación resultante.

4.º Calcular la otra incógnita en la ecuación despejada.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

1º Despejamos x en la segunda ecuación: $\Rightarrow$ $x = \underline{8 - 2y}$

2º Sustituimos en la primera ecuación: $\Rightarrow$ $3(\underline{8 - 2y}) - 4y = -6$

3º Resolvemos la ecuación $3(8 - 2y) - 4y = -6$

$\Rightarrow$ $24 - 6y - 4y = -6$ $\Rightarrow$ $30 = 10y$ $\Rightarrow$ $\mathbf{y = 3}$

4º Calculamos x: $\Rightarrow$ Si $y = \mathbf{3}$, entonces, $x = \mathbf{8 - 2 \cdot 3} = 2$.

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 3$.

Resolución de sistemas por reducción

Al pagar en una cafetería, un alumno observa que 2 bocadillos y 3 refrescos cuestan 7 € y 3 bocadillos y 4 refrescos cuestan 10 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Si **b** es lo que cuesta un bocadillo y **r** lo que cuesta un refresco, el sistema resultante es:

$$\begin{cases} 2b + 3r = 7 & \longrightarrow \text{Primera consumición.} \\ 3b + 4r = 10 & \longrightarrow \text{Segunda consumición.} \end{cases}$$

TRES consumiciones como la primera, cuestan 21 €: $\rightarrow$ $3 \cdot (2b + 3r) = 3 \cdot 7$

DOS consumiciones como la segunda, cuestan 20 €: $\rightarrow$ $2 \cdot (3b + 4r) = 2 \cdot 10$

El sistema inicial se transforma en: $\begin{cases} 6b + 9r = 21 \\ 6b + 8r = 20 \end{cases}$

Si restamos las ecuaciones: $1r = 1$

Si un refresco cuesta 1 €, cada bocadillo costará 2 euros.

> Este modo de resolver sistemas de ecuaciones se llama método de reducción.

Método de reducción

Pasos a seguir:

1.º Se igualan los coeficientes de una incógnita, salvo el signo, eligiendo un múltiplo de ambos.

Puede ser el producto de los coeficientes de esa incógnita.

2.º Se suman o restan, según convenga, las ecuaciones.

3.º Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.

4.º Calcular la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

ESTE MÉTODO SE FUNDAMENTA EN:

Al multiplicar una ecuación por un número se transforma en otra equivalente a ella.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.

Método de reducción: ejemplo

Resolver por el método de reducción, el sistema: $\begin{cases} 6x + 5y = 27 \\ 8x - 2y = 10 \end{cases}$

1º Vamos a eliminar la incógnita y.

Un múltiplo de 2 y 5 es 10, el producto de ambos:

Se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda por 5:

El sistema inicial se transforma en: $\begin{cases} 12x + 10y = 54 \\ 40x - 10y = 50 \end{cases}$

2º Se suman las ecuaciones: → $52x = 104$

3º Se resuelve la ecuación $52x = 104$: ⇒ $x = 2$

4º Se sustituye $x = 2$ en la 1ª ecuación: ⇒ $12 + 5y = 27$

Se resuelve la ecuación: ⇒ $y = 3$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 3$.

Método de reducción doble

El siguiente sistema se elimina, por el mismo proceso anterior, primero una incógnita, y luego otra

$$\begin{cases} 6x + 5y = 27 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$$

Elimina la x

Por 2 / Por –3:
$$\begin{aligned} 12x + 10y &= 54 \\ -12x + 9y &= -30 \end{aligned}$$

Suma: $19y = 24$

Resuelve: $y = \dfrac{24}{19}$

Elimina la y

Por 3 / Por 5:
$$\begin{aligned} 18x + 15y &= 81 \\ 20x - 15y &= 50 \end{aligned}$$

Suma: $38x = 131$

Resuelve: $x = \dfrac{131}{38}$

Solución:

$$x = \frac{131}{38}; \quad y = \frac{24}{19}$$

Resolución de problemas

PROBLEMA

Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía"
¿Cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?

Si C son los sacos que lleva el caballo y M los que lleva el mulo, se tiene:

Lenguaje ordinario	Lenguaje algebraico
Si el caballo da un saco al mulo:	
Número de sacos del caballo	$C - 1$
Número de sacos del mulo	$M + 1$
El mulo llevaría el doble de carga	$M + 1 = 2(C - 1)$
Si el mulo da un saco al caballo:	
Número de sacos del caballo	$C + 1$
Número de sacos del mulo	$M - 1$
Las dos cargas serán iguales	$M - 1 = C + 1$

Sistema: $\begin{cases} M + 1 = 2(C - 1) \\ M - 1 = C - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M - 2C = -3 \\ M - C = 2 \end{cases} \rightarrow C = 5,\ M = 7$

El caballo llevaba 5 sacos y el mulo, 7 sacos.