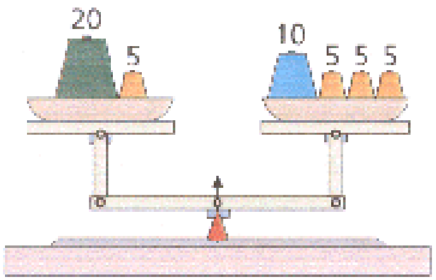
Igualdades y ecuaciones



La balanza está en equilibrio.

$$20 + 5 = 10 + 5 + 5 + 5$$

Representa una igualdad numérica

Una **igualdad numérica** se compone de dos expresiones numéricas unidas por el signo igual, (=).

Una igualdad tiene **dos miembros**, el primero es la expresión que está a la izquierda del signo igual, y el segundo, el que está a la derecha.

$$\underbrace{20 + 5}_{1^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{10 + 5 + 5 + 5}_{2^{\circ}\text{ miembro}}$$

La igualdad **$x + 20 = 10 + 20$** es una **ecuación**. La letra **x** se llama **incógnita**, porque su valor es desconocido.

Una **ecuación** es una igualdad en cuyos miembros hay letras y números relacionados por operaciones aritméticas.
Una ecuación también se llama igualdad algebraica.

Clasificación de las ecuaciones

Las ecuaciones se clasifican atendiendo al número de letras o incógnitas y al término de mayor grado.

Ejemplos:

$x + 10 = 20 - 12$ es una ecuación de primer grado con una incógnita.

$2x + 2y = 100$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

$x^2 = 16$ es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

$xy = 12$ es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas.

$x^3 - x^2 + 5x = 10$ es una ecuación de tercer grado con una incógnita.

EJERCICIO PROPUESTO

Sustituye en cada caso, la letra o letras por números para que se verifique la igualdad.

a) $a - 3 = 10$ → $a = 13$

b) $5x = 100$ → $x = 20$

c) $x + y = 8$ → $x = 1, y = 7$; $x = 5, y = 3$

d) $5 + 2x = 15$ → $x = 5$

e) $x^2 = 16$ → $x = 4$; $x = -4$

Soluciones de una ecuación

Las soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que al sustituirlos en la ecuación hacen que se verifique la igualdad.

Ejemplo 1:

¿Cuáles son los valores de x que al reemplazarlos en la ecuación $5 + \underline{x} = 8$ *hacen que se cumpla la igualdad?*

Existe un solo valor: es $\mathbf{x = 3}$, porque $5 + \underline{3} = 8$.

Ejemplo 2:

¿Con una cuerda de 100 cm podemos formar muchos rectángulos. La condición que deben cumplir sus lados viene expresada por la ecuación $2x + 2y = 100$.

La ecuación anterior, $\mathbf{2x + 2y = 100}$, tiene infinitas soluciones.

Algunos pares de valores son: $\mathbf{x = 30}$, $\mathbf{y = 20}$; $x = 40$, $y = 10$; $x = 25$, $y = 25$.

Comprobamos la primera pareja: $2 \cdot 30 + 2 \cdot 20 = 60 + 40 = 100$.

Ejemplo 3:

¿Cuáles son los valores de x que al reemplazar en la ecuación $x^2 = 36$ *hacen que la igualdad se verifique?*

Hay dos valores: $\mathbf{x = 6}$ y $\mathbf{x = -6}$, pues: $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$.

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones.

Ecuaciones equivalentes

La solución de las siguientes ecuaciones es **x = 6**:

Sustituyendo:

a) $4x - 12 = x + 6$ → $4 \cdot 6 - 12 = 6 + 6 = 12$

b) $3x = 18$ → $3 \cdot 6 = 18$

c) $x = 6$ → Es evidente.

Las tres ecuaciones son equivalentes.

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Observa cómo pueden hacerse ecuaciones equivalentes a otra dada:

Ecuación dada: $\boxed{3x + 4 - x = 7 + x}$

Restamos 4 a cada miembro.

$$3x + 4 - x - 4 = 7 + x - 4 \iff \boxed{2x = 3 + x}$$

Restamos x a cada miembro

$$2x - x = 3 + x - x \iff \boxed{x = 3}$$

Comprueba que x = 3 es la solución de las tres ecuaciones.

Regla de la suma

Regla de la suma y transposición de términos

Si a los dos miembros de una ecuación **se les suma o se les resta** el mismo número o la misma expresión algebraica, se obtiene otra **ecuación equivalente** a la dada.

Ejemplo: Para resolver la ecuación $5x - 7 = 28 + 4x$

Restamos 4x: $\longrightarrow$ $5x - 7 - 4x = 28 + 4x - 4x$

Sumamos 7: $\longrightarrow$ $5x - 7 - 4x + 7 = 28 + 4x - 4x + 7$

Operamos: $\longrightarrow$ $x = 35$

Aplicar la regla equivale a transponer términos, pasándolos de un miembro a otro cambiándolos de signos.

En la práctica $5x - 7 = 28 + 4x$

Se pasa 4x al primer miembro restando: $5x - 7 - 4x = 28$

Se pasa 7 al segundo miembro sumando: $5x - 4x = 28 + 7$

Se opera: $x = 35$

Regla del producto

Regla del producto y simplificación de términos

Si a los dos miembros de una ecuación **se los multiplica o divide** por un mismo número, distinto de cero, se obtiene otra **ecuación equivalente** a la dada.

Ejemplo: Para resolver la ecuación $\frac{5}{2}x = 270$

Multiplicamos por 2: → $2 \cdot \frac{5}{2}x = 2 \cdot 270 \Rightarrow 5x = 540$

Dividimos por 5: → $\mathbf{x = 108}$

La regla del producto permite simplificar términos.

En la práctica

$\frac{5}{2}x = 270 \Rightarrow 5x = 540 \Rightarrow x = 108$

Se multiplica por 2 a ambos miembros

Se simplifica por 5

Resolución de ecuaciones de primer grado

En la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita conviene seguir un orden para evitar errores de cálculo:

1. Quitar paréntesis.

2. Quitar denominadores. Se puede hacer de dos maneras:

- multiplicando la ecuación por el producto de los denominadores, o
- multiplicando la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

3. Suprimir de ambos miembros los términos iguales.

4. Pasar a un miembro los términos que contenga la incógnita, y al otro miembro los números

5. Reducir términos semejantes y operar.

6. Despejar la incógnita.

Ejercicio resuelto 1

Resolver la ecuación: $4(x - 10) = -6(2 - x) - 5x$

· Quitar paréntesis:

$$4x - \underline{40} = -12 + 6x - \underline{5x}$$

· Pasar la incógnita al 1er miembro y los números al 2º:

$$4x - 6x + \underline{5x} = -12 + \underline{40}$$

· Reducir términos semejantes:

$$3x = 28$$

· Despejar la incógnita:

$$\boxed{x = 7}$$

Ejercicio resuelto 2

Resolver la ecuación: $$\frac{x-1}{4}-\frac{x-5}{36}=\frac{x+5}{9}$$

· Quitar denominadores:
m.c.m.(4, 36, 9) = 36.
Multiplicamos por 36

$$\frac{36(x-1)}{4}-\frac{36(x-5)}{36}=\frac{36(x+5)}{9}$$

· Operar:

$$9(x-1)-(x-5)=4(x+5)$$

· Quitar paréntesis:

$$9x-9-x+5=4x+20$$

· Transponer términos:

$$9x-x-4x=20+9-5$$

· Reducir términos semejantes:

$$4x=24$$

· Despejar la incógnita:

$$\boxed{x=6}$$

Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado

Para resolver un problema mediante ecuaciones conviene seguir estos pasos:

1.er paso: Expresar el enunciado en lenguaje algebraico.

2.º paso: Escribir la ecuación.

3.er paso: Resolver la ecuación.

4.º paso: Interpretar el resultado.

5.º paso: Comprobar el resultado obtenido.

Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado: problema resuelto

Marta tiene 17 años y su madre 43. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el triple que la edad de su hija Marta.

1.º Años que tienen que transcurrir x

Edad de Marta dentro de x años .... $11 + x$

Edad de la madre dentro de x años .... $43 + x$

2.º Dentro de x años se tiene que cumplir .... $3(11 + x) = 43 + x$

3.º Resolvemos la ecuación:

$$3(11 + x) = 43 + x \Rightarrow 33 + 3x = 43 + x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow \mathbf{x = 5}$$

4.º Tienen que transcurrir 5 años.

Dentro de 5 años, Marta tendrá 16 años, y su madre, 48 años.

5.º Comprobación: $3 \cdot (11 + 5) = 3 \cdot 16 = 48$ y $43 + 5 = 48$

Ecuaciones de segundo grado. Tipo $ax^2 + c = 0$

Ejemplos:

$\mathbf{x^2 - 16 = 0} \xrightarrow{\text{Transponemos 16}} \mathbf{x^2 = 16} \xrightarrow{\text{Extraemos la raíz}} x = \sqrt{16} = \pm 4$

$\mathbf{3x^2 = 243}$ también es del mismo tipo.

$\mathbf{3x^2 = 243} \xrightarrow{\text{Simplificamos por 3}} \mathbf{x^2 = 81} \longrightarrow x = \sqrt{81} = \pm 9$

$\mathbf{3x^2 = 243}$ es equivalente a $\mathbf{3x^2 - 243 = 0} \Longleftrightarrow \mathbf{3x^2 + (-243) = 0}$

Por tanto es una ecuación del tipo $\mathbf{ax^2 + c = 0}$, con $\mathbf{a} \neq 0$.

El término $\mathbf{ax^2}$ se llama cuadrático, y el $\mathbf{c}$, término independiente.

Las ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ se resuelven despejando la incógnita, y si tienen solución, esta constituida por dos números opuestos.

Si $\mathbf{c = 0}$, la ecuación es $\mathbf{ax^2 = 0}$, cuya única solución es $\mathbf{x = 0}$.

Ecuaciones de segundo grado. Tipo $ax^2 + bx = 0$

Ejemplos:

$\mathbf{x^2 - 4x = 0} \xrightarrow{\text{Factor común x}} \mathbf{x(x - 4) = 0}$ → $x = 0$, $x = 4$

$x = 0$ y $x = 4$ son soluciones de $x^2 - 4x = 0$ → $0^2 - 4 \cdot 0 = 0$, $4^2 - 4 \cdot 4 = 0$

La ecuación $\mathbf{7x^2 - 42x = 0}$ también es del mismo tipo.

$\mathbf{7x^2 - 42x = 0} \xrightarrow{\text{Factor común x}} \mathbf{x(7x - 42) = 0}$ → $x = 0$, $7x - 42 = 0$

$\Rightarrow 7x - 42 = 0 \Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6$

$x = 0$ y $x = 6$ son soluciones de $7x^2 - 42x = 0$. **Compruébalo.**

Las ecuaciones anteriores son del tipo $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$, con $\mathbf{a} \neq 0$.

El término **bx** se llama término lineal.

> Las ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ tienen siempre dos soluciones, siendo una de ellas $\mathbf{x = 0}$.
> Se resuelven sacando factor común, e igualando a cero cada uno de los dos factores.

Ecuación de segundo grado completa

Es del tipo $\boxed{ax^2} + \boxed{bx} + \boxed{c} = 0$

Término independiente

Término lineal

Término cuadrático

Las soluciones de de esta ecuación se obtienen aplicando las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, las soluciones de la ecuación $2x^2 + 3x - 35 = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-35)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 280}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{289}}{4} = \frac{-3 + 17}{4} = 3{,}5$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-35)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 - \sqrt{289}}{4} = \frac{-3 - 17}{4} = -5$$

Comprobación:

$$2 \cdot 3{,}5^2 + 3 \cdot 3{,}5 - 35 = 24{,}5 + 10{,}5 - 35 = 0$$

$$2 \cdot (-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 35 = 50 - 15 - 35 = 0$$

Ecuación de segundo grado completa. Ejercicio

EJERCICIO RESUELTO

Resolver la ecuación $4x^2 - 37x + 9 = 0$

Identificamos los coeficientes: $a = 4,\ b = -37,\ c = 9$

Aplicamos las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-(-37) + \sqrt{(-37)^2 - 4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4} = \frac{37 + \sqrt{1369 - 144}}{8} = \frac{37 + \sqrt{1225}}{8} = \frac{37 + 35}{8} = 9$$

$$x_2 = \frac{-(-37) - \sqrt{(-37)^2 - 4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4} = \frac{37 - \sqrt{1369 - 144}}{8} = \frac{37 - \sqrt{1225}}{8} = \frac{37 - 35}{8} = \frac{1}{4}$$

Las soluciones son $x_1 = 9$ y $x_2 = \frac{1}{4}$

Comprobación:

Para $x = 9 \longrightarrow 4\cdot 9^2 - 37\cdot 9 + 9 = 324 - 333 + 9 = 0$

Para $x = \frac{1}{4} \longrightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 37\cdot\frac{1}{4} + 9 = \frac{1}{4} - \frac{37}{4} + 9 = -\frac{36}{4} + 9 = 0$

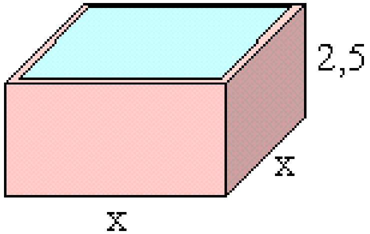
Resolución de problemas

PROBLEMA

Se desea construir un depósito de agua de 90 m^3 de capacidad, con forma de ortoedro de base cuadrada y de 2,5 m de altura. ¿Cuánto tiene que medir el lado de la base?

Hacer un dibujo

Indicamos con x el lado de la base.



Plantear la ecuación

El volumen del ortoedro es largo por ancho por alto: $V = x \cdot x \cdot 2{,}5 = 2{,}5\,x^2$

Como el volumen tiene que ser igual a 90 m^3: $2{,}5x^2 = 90$

Resolver la ecuación

$$2{,}5x^2 = 90 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} \Rightarrow x = 6;\ x = -6$$

Interpretar el resultado

La solución $x = -6$ no tiene sentido.

El lado de la base del depósito tiene que medir 6 m.

Comprobación $2{,}5x^2 = 2{,}5 \cdot 6^2 = 2{,}5 \cdot 36 = 90$