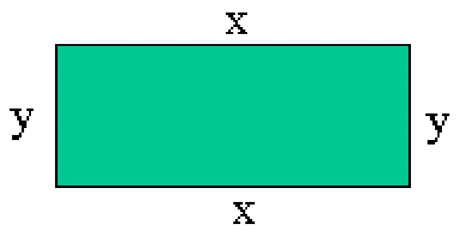
Del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico

El número de metros de valla necesarios para cercar un terreno rectangular es dos veces el largo más dos veces el ancho.

Esta información la podemos expresar de forma más concisa:



Indicamos con la letra **x** el largo y con la letra **y** el ancho del mismo:

Por tanto, $2x$ es dos veces el largo; y $2y$ dos veces el ancho.

La valla necesaria para cercar el terreno será: $\boxed{2x + 2y}$.

La expresión
$2x + 2y$
es una expresión algebraica.

Con el lenguaje algebraico las informaciones se expresan de forma más sencilla.

El **lenguaje algebraico** utiliza letras, números y signos de operaciones para expresar informaciones.

Frases en lenguaje algebraico

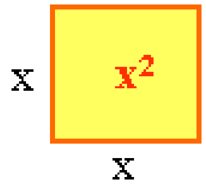
Lenguaje ordinario	Lenguaje algebraico
· El triple de un número	$3x$
· El cuadrado de la suma de dos números	$(a + b)^2$
· Dos números naturales consecutivos	$n, \; n + 1$
· Hoy tengo 15 años. ¿Cuántos años tendré cuando pasen x años?	$15 + x$
· Hoy tengo 15 años. ¿Cuántos años tenía hace *y* años?	$15 - y$
· Un número par	$2n$
· Área del triángulo de base b y altura h	$\boxed{\dfrac{b \cdot h}{2}}$

Al-Khuwrizmi

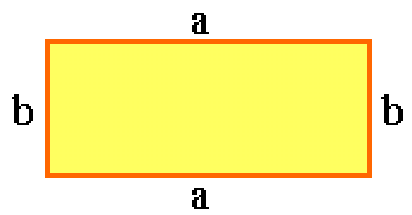
Expresiones algebraicas

Las fórmulas que se utilizan en geometría, ciencias y otras materias son expresiones que contienen letras, o números y letras.

El área de un cuadrado de lado x es x^2



El perímetro de un rectángulo de lados a y b es $2a + 2b$



La densidad de un cuerpo de masa m y volumen V es $\dfrac{m}{V}$

> Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustración, multiplicación, división y potenciación.

En $12x^3$ se distingue $\rightarrow$ 12 x^3

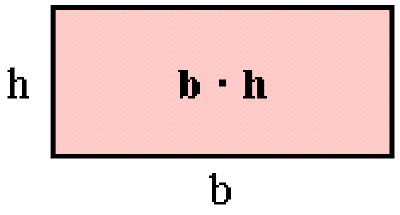
Parte literal

Factor numérico

Valor numérico de una expresión algebraica

El área de un rectángulo de base b y altura h es

$$\boxed{\mathbf{A = b \cdot h}}$$



Para hallar el área de un rectángulo concreto, por ejemplo, de uno cuya base sea b = 4 cm y h = 3, se sustituyen en la fórmula las letras b y h por los números 4 y 3, respectivamente: $\longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{A = b \cdot h = 4 \cdot 3 = 12}}$

El número 12 es el valor numérico de la expresión algebraica b · h, cuando se sustituye b por 4 y h por 3.

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras de la misma por números determinados y hacer las operaciones indicadas en la expresión.

EJERCICIO

Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $\mathbf{5x + 3a^2}$, para $\mathbf{x = -1}$ y $\mathbf{a = 2}$.

Sustituimos en la expresión, x por –1 y a por 2:

$$\mathbf{5x + 3a^2 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2^2 = -5 + 3 \cdot 4 = -5 + 12 = 7}$$

Monomios

Observa las siguientes expresiones algebraicas:

a) $5ax^3$ b) $\frac{7}{2}a^2xyz$ c) $\frac{4}{x}$ d) $8x^{-2}y^5$ e) $9c^{-2}x$ f) $2x + z^2y$

En las dos primeras expresiones (a y b) las únicas operaciones que afectan a las letras son **la multiplicación y la potenciación de exponente entero positivo**: son monomios. Las demás expresiones (c, d, e y f) no lo son.

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que afectan a las letras son la multiplicación y la potenciación de exponente entero positivo.

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de sus letras.

El grado del monomio a^3b^2c es 6, $(3 + 2 + 1)$

El grado de un monomio respecto a una letra es el exponente de esa letra

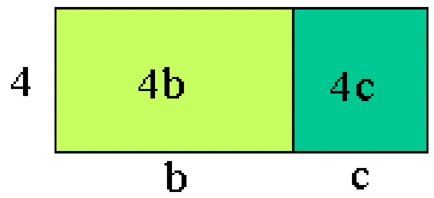
El grado del monomio a^3b^2c respecto a la letra b es 2.

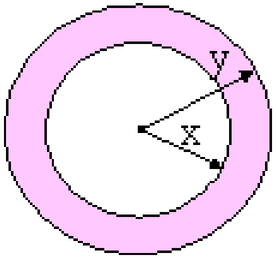
Recuerda: $1 \cdot x = x$; $x^1 = x$; $x \cdot y = xy$

El coeficiente 1, el exponente 1 y el signo de multiplicación suelen omitirse.

Polinomios

¿Cómo podríamos expresar el área de estas figuras:





Área $= 4b + 4c$

Suma de dos monomios

Área $= 3{,}14y^2 - 3{,}14x^2$

Resta de dos monomios

Ambas expresiones son polinomios.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la diferencia de dos o más monomios. Cada monomio se llama término del polinomio.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Binomio:
$a - b^2$

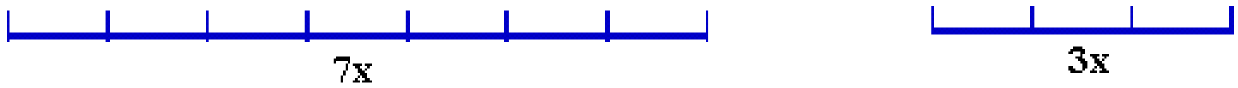
Grado 2.

Trinomio:
$x^4 - 3x^2 + 7$

Grado 4.

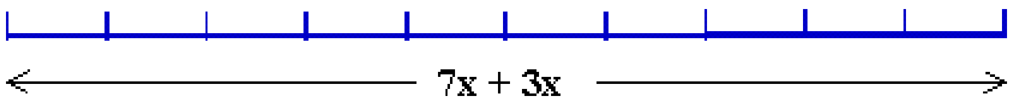
Suma y resta de monomios

Dos segmentos miden 7x y **3x**, respectivamente. Vamos a sumarlos.



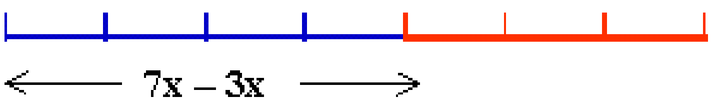
Si los unimos por los extremos tenemos un segmento de longitud 10 x: **10x** = 7x + **3x.**

$$7x + 3x = 10x$$



Si a la longitud del segmento 7x se le resta la longitud del segmento 3x, obtenemos 4x: 7x – 3x = 4x.

$$7x - 3x = 4x$$



Para que dos monomios puedan sumarse o restarse es necesario que tengan las mismas letras con los mismos exponentes: que sean **semejantes**.

No se puede reducir
$3x + x^2$
Se deja indicado.
Resulta un polinomio.

La suma o diferencia de dos monomios semejantes es otro monomios semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes de los monomios dados. Reducir términos semejantes es sumarlos o restarlos.

Suma y resta de monomios: ejercicios

1. Realizar las siguientes sumas o restas de monomios:

a) $4xy^2 + 9xy^2 \longrightarrow 13xy^2$

b) $5ab^3 + 4ab^2 \longrightarrow$ No pueden sumarse porque no son monomios semejantes.

c) $x + 5x - 2x \longrightarrow 4x$

2. Reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4x^3 - 2x^2 \longrightarrow$ No puede reducirse.

b) $4a^2 + 1 + a^2 + a \longrightarrow 5a^2 + a + 1$

c) $3x^2 - 8x + \underline{2} - x^2 - \underline{8} \longrightarrow 2x^2 - 8x - \underline{6}$

Multiplicación de monomios

Para multiplicar monomios tenemos en cuenta el producto de potencias de la misma base.

Ejemplos:

$5x^3 \cdot x^6 = 5x^9$

x^9

$3a^2b^4 \cdot 5ab^3 = 15a^3b^7$

15

a^3

b^7

$-6x^2yz^3 \cdot 2xya = -12x^3y^2z^3a$

-12

x^3

y^2

El producto de monomios es otro monomio que tiene:

– como coeficiente el producto de los coeficientes de los factores;

– como parte literal, las letras que aparecen en los monomios, con exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

División de monomios

Para dividir monomios se procede en forma similar: se dividen los coeficientes del dividendo y del divisor y se restan los exponentes de sus letras.

Ejemplos:

$a^5 : a^3 = a^2$

$16x^5yz^2 : 2x^3yz = 8x^2z$

$8 \quad x^2 \quad 1 \quad z$

$6a^5b^2 : 2a^2b^3z^3 = \dfrac{3a^3}{bz^3}$

$3 \quad a^3 \quad \dfrac{1}{bz^3}$

La expresión $\dfrac{3a^3}{bz^3}$ no es un monomio; es una fracción algebraica.

El cociente de dos monomios no siempre es otro monomio. Para que lo sea, tienen que ser divisibles; el monomio dividendo debe tener, al menos, las mismas letras que el monomio divisor, y con exponentes mayores o iguales.

Más ejemplos:

$6a^2bc : (-2)ab = -3ac$

$-15x^3y^2 : 9x^2 = -\dfrac{5}{3}xy^2$

Suma y diferencia de polinomios

La suma o diferencia de polinomios es otro polinomio formado por la suma o diferencia indicada de los términos no semejantes y por la suma o diferencia de los términos semejantes.

Ejemplo: $(2x^2 + 6xy - 4y) + (x^2 - 3xy) - (8x^2 - y + 7xb^2) =$

1.º Suprimir los paréntesis $\longrightarrow$ $= 2x^2 + 6xy - 4y + x^2 - 3xy - 8x^2 + y - 7xb^2 =$

2.º Agrupar términos semejantes $\longrightarrow$ $= (2x^2 + x^2 - 8x^2) + (6xy - 3xy) + (-4y + y) - 7xb^2 =$

3.º Operar $\longrightarrow$ $= -5x^2 + 3xy - 3y - 7xb^2$

EJERCICIO RESUELTO

Realiza las siguientes operaciones:

a) $(2x^2 + 3x - 4) + (5x^2 - 4x + 1) = (2x^2 + 5x^2) + (3x - 4x) + (-4 + 1) = 7x^2 - x - 3$

b) $(2x^2 + 3x - 4) - (7x^2 - 4x - 3) = (2x^2 - 7x^2) + (3x + 4x) + (-4 + 3) = -5x^2 + 7x - 1$

Producto de polinomios

Para multiplicar polinomios aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$(a + 5b^2) \cdot (a - 2b^2 + x) = \boxed{a \cdot (a - 2b^2 + x)} + \boxed{5b^2 \cdot (a - 2b^2 + x)} =$$

$$= a^2 - 2ab^2 + ax + 5ab^2 - 10b^4 + 5b^2x =$$

$$= a^2 + 3ab^2 + ax - 10b^4 + 5b^2x$$

El **producto de dos polinomios** es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primero por cada término del segundo, y reduciendo luego los términos semejantes.

EJERCICIO

Multiplicar: $(2x^2 + 3x - 4) \cdot (5x^2 - 4x + 1) =$

$$= 2x^2 \cdot (5x^2 - 4x + 1) + 3x \cdot (5x^2 - 4x + 1) + (-4) \cdot (5x^2 - 4x + 1)$$

$$= 10x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 15x^3 - 12x^2 + 3x - 20x^2 + 16x - 4$$

$$= 10x^4 + 7x^3 - 30x^2 + 19x - 4$$

Cociente de un polinomio por un monomio

El cociente de un polinomio por un monomio se obtiene dividiendo cada término del polinomio por el monomio.

$$(4x^4 + 2x^2 - 10x^3y) : 2x^2 = \boxed{4x^4 : 2x^2} + \boxed{2x^2 : 2x^2} - \boxed{10x^3y : 2x^2} =$$

$$= 2x^2 + 1 - 5xy$$

La división $(x^3 + xy - 5) : xy$ no es posible, pues x^3 y -5 no son divisibles por el monomio xy.

EJERCICIO RESUELTO

Dividir: $(-8y^3 + 4y^2 - 12xy^2a^3) : (-2y^2)$

$$(-8y^3 + 4y^2 - 12xy^2a^3) : (-2y^2) =$$

$$= (-8y^3) : (-2y^2) + 4y^2 : (-2y^2) - 12xy^2a^3 : (-2y^2)$$

$$= 4y - 2 + 6a^3x$$

Igualdades notables

- **Cuadrado de un binomio: suma**

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Cuadrado del primero,
más el doble del primero por el segundo,
más el cuadrado del segundo.

- **Cuadrado de un binomio: diferencia**

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Cuadrado del primero,
memos el doble del primero por el segundo,
más el cuadrado del segundo.

- **Suma por diferencia de dos binomios**

$$(a+b)\cdot(a-b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$$

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

Diferencia de cuadrados

Resolución de problemas

PROBLEMA

Hallar una fórmula con una sola letra en el segundo miembro (una variable) que permita calcular el área de cualquier rectángulo que se pueda formar con una cuerda de 100 cm de longitud,.

Partir de casos particulares

Algunos rectángulos posibles son:

(Busca tú otros)

Base = 30 cm
Altura = 20 cm
Área = 600 cm²
20
30

Área = 525 cm²
Base = 35 cm
Altura = 15 cm
15
35

Generalizar la solución mediante una fórmula

Hay infinitos rectángulos con perímetro igual a 100 cm.
Para generalizar, observa este otro rectángulo:

x
h
Área:
$A = xh$
h
x

Se tiene que cumplir que $x + x + h + h = 100$

$\Rightarrow 2x + 2h = 100 \Rightarrow x + h = 50 \Rightarrow h = 50 - x$

Reemplazando h en la fórmula del área:

$\Rightarrow A = xh = x(50 - x) = 50x - x^2 \Rightarrow \boxed{A = 50x - x^2}$

Comprobación

Si base $x = 30 \rightarrow A = 50 \cdot 30 - 30^2 = 1500 - 900 = 600 \text{ cm}^2$.

(Comprueba tú otros casos)