

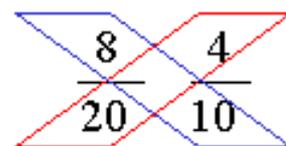
Fracciones equivalentes

Veamos las fracciones $\frac{8}{20}$ y $\frac{4}{10}$

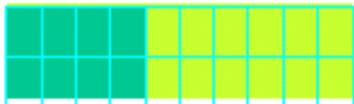
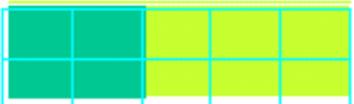
Dan el mismo cociente: $\frac{8}{20} = 0,4 \iff \frac{4}{10} = 0,4$

Tienen la misma fracción irreducible: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} \iff \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Tienen iguales productos cruzados: $8 \cdot 10 = 20 \cdot 4 \iff$



Actúan de la misma manera: $\frac{8}{20}$ de 5 = 2 $\iff \frac{4}{10}$ de 5 = 2

Representan lo mismo: $\frac{8}{20}$  $\frac{4}{10}$ 

Las fracciones $\frac{8}{20}$ y $\frac{4}{10}$ son equivalentes. $\iff \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

Para comprobar si dos fracciones son equivalentes basta ver si cumplen alguna de las condiciones anteriores

Cómo obtener fracciones equivalentes

Obtenemos fracciones equivalentes a $\frac{32}{48}$

$$\frac{32 : 16}{48 : 16} = \dots = \frac{32 : 4}{48 : 4} = \frac{32 : 2}{48 : 2} = \frac{32}{48} = \frac{2 \cdot 32}{2 \cdot 48} = \frac{3 \cdot 32}{3 \cdot 48}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{2}{3} & = & \dots & = & \frac{8}{12} & = & \frac{16}{24} = \frac{32}{48} = \frac{64}{96} = \frac{96}{144} \end{array}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24} \quad \text{son fracciones reducidas de } \frac{32}{48}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{es la fracción irreducible de } \frac{32}{48}$$

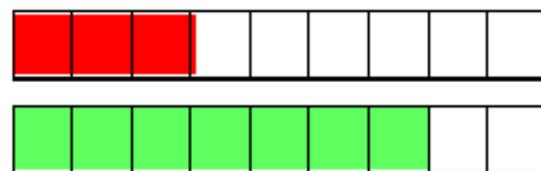
$$\frac{64}{96} = \frac{96}{144} \dots \quad \text{son fracciones ampliadas de } \frac{32}{48}$$

Para obtener fracciones equivalentes a una dada:

- Se multiplican o dividen sus términos por el mismo número.

Comparación de fracciones

Con el mismo denominador:

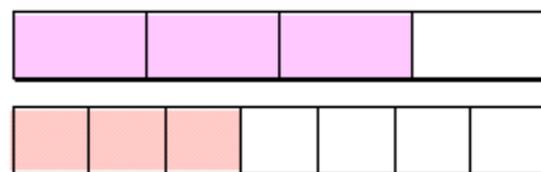


Comparamos las fracciones $\frac{3}{9}$ y $\frac{7}{9}$

$\frac{3}{9}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{7}{9} > \frac{3}{9}$

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador

Con el mismo numerador:



Comparamos las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{7}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$

Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador

Reducción de fracciones a común denominador

Queremos obtener fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ con la condición de que tengan el mismo denominador.

El denominador debe ser múltiplo de 3, 4 y 6; por ejemplo $3 \cdot 4 \cdot 6$

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \text{ y } \frac{5}{6} \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{48}{72} \\ \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{54}{72} \\ \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{60}{72} \end{array}$$

Hemos multiplicado los dos términos de cada fracción por los denominadores de las otras dos.

Reducción de fracciones a m.c.m.

También podemos tomar como denominador común el menor de los múltiplos comunes de los denominadores: el m.c.m. de los denominadores.

Para las mismas fracciones, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ se tendrá:

$$\text{m.c.m. (3, 4, 6)} = 12$$

$$12 = 3 \cdot 4$$

$$12 = 4 \cdot 3$$

$$12 = 6 \cdot 2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

Las fracciones $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ y $\frac{10}{12}$ son equivalentes a las dadas y tienen el mismo denominador: el mínimo común denominador.

Para reducir varias fracciones a común denominador:

- 1.º Se halla el m.c.m. de los denominadores.
- 2.º Se divide el m.c.m. entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente.

Comparación de fracciones cualesquiera

Comparamos $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{5}$

Para ello reducimos a común denominador:
m.c.m. (3, 6, 5) = 30.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30}$$

Como $\frac{25}{30} > \frac{20}{30} > \frac{12}{30}$, entonces: $\frac{5}{6} > \frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Para comparar dos o más fracciones cualesquiera:

- 1.º Se reducen a común denominador.
- 2.º Es mayor la que tiene mayor numerador.

De otra forma

Para comparar fracciones podemos comparar los cocientes que resultan al dividir en cada fracción el numerador entre el denominador.

$$\frac{5}{6} = 0,8333\dots$$

$$> \frac{2}{3} = 0,6666\dots$$

$$> \frac{2}{5} = 0,4$$

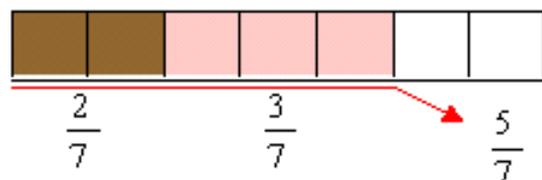
Luego: $\frac{5}{6} > \frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Suma y resta de fracciones

Con el mismo denominador

Suma

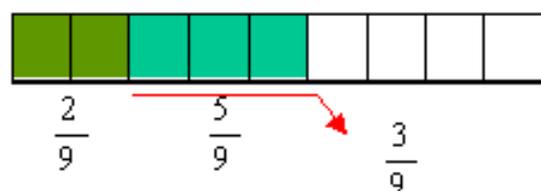
$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$$



$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2 + 3}{7} = \frac{5}{7}$$

Resta

$$\frac{5}{9} - \frac{2}{9}$$



$$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5 - 2}{9} = \frac{3}{9}$$

La suma o la diferencia de dos fracciones con el mismo denominador es una fracción que tiene:

- El mismo denominador.
- El numerador igual a la suma o diferencia de los numeradores.

Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Suma

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$$

1. Las reducimos a común denominador:

$$\text{m.c.m. } (6, 4) = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

2. Las sumamos.



$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$$

Resta

$$\frac{11}{12} - \frac{3}{8}$$

1. Las reducimos a común denominador:

$$12 \cdot 4 = 8 \cdot 6 = 48.$$

2. Las restamos.

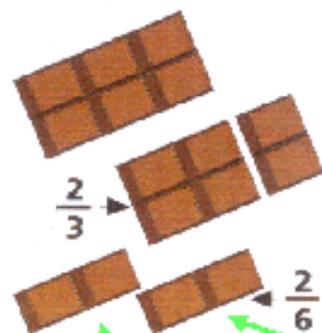


$$\frac{11}{12} - \frac{3}{8} = \frac{11 \cdot 4}{12 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{44}{48} - \frac{18}{48} = \frac{26}{48} = \frac{13}{24}$$

Para **sumar** o **restar** fracciones con distinto denominador:

- Se reducen a un común denominador.
- Se suman o restan las fracciones obtenidas.

Multiplicación de fracciones



Ricardo merienda la mitad de los $\frac{2}{3}$ de la tableta de chocolate. ¿Qué fracción de tableta representa el chocolate que ha comido Ricardo?

Mitad de $\frac{2}{3}$

Mitad de $\frac{2}{3}$

Ha tomado $\frac{2}{6}$ de tableta.

Decimos: la mitad de dos tercios es dos sextos.

Escribimos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6}$$

El **producto de dos fracciones** es una fracción que tiene:

- El numerador igual al producto de los numeradores
- El denominador igual al producto de los denominadores.

Fracciones inversas de una dada

¿Cuál es fracción que multiplicada por $\frac{5}{8}$ es igual a 1?

Observa: $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{40}{40} = 1$. Se dice que $\frac{8}{5}$ es la fracción inversa de $\frac{5}{8}$.

De igual modo, $\frac{5}{8}$ es la fracción inversa de $\frac{8}{5}$.

$\frac{5}{8}$ y $\frac{8}{5}$ son fracciones inversas entre sí.

Dos fracciones son inversas cuando su producto es igual a la unidad.

Ejemplos: Como los productos:

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{28}{28} = 1$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 1} = \frac{5}{5} = 1$$

Las fracciones $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{1}$ son inversas, respectivamente, de $\frac{7}{4}$ y $\frac{1}{5}$

División de fracciones

¿Cuál es fracción que multiplicada por $\frac{3}{5}$ es igual a $\frac{1}{4}$? $\frac{3}{5} \cdot \boxed{?} = \frac{1}{4}$

La fracción que buscamos es el resultado de $\frac{1}{4} : \frac{3}{5}$.

$$\frac{1}{4} : \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$$



Comprobación:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

La fracción buscada es $\frac{5}{12}$

El cociente de dos fracciones es igual al producto del dividendo por la inversa del divisor.

EJERCICIO PROPUESTO

Haz las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma irreducible:

a) $\frac{3}{8} : \frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{4} : \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} \right)$

a) $\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$

b) $\frac{3}{4} : \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} \right) = \frac{3}{4} : \frac{15}{48} = \frac{3}{4} \cdot \frac{48}{15} = \frac{3 \cdot 48}{4 \cdot 15} = \frac{144}{60} = \frac{12}{5}$

Potencias de fracciones

Observa que $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ es un producto de cuatro factores iguales.

Escribimos abreviadamente: $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$

$\left(\frac{2}{5}\right)^4$ es una potencia. Su base es $\frac{2}{5}$ y su exponente 4.

Calculamos: $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^4}{5^4}$ \Leftrightarrow $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$

Para elevar una fracción a una potencia se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Cuadrados y raíz cuadrada de una fracción

Observa que $\frac{9}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{25}$ es el cuadrado de la fracción $\frac{3}{5}$

También podemos pensar que representa un cuadrado de superficie igual a $\frac{9}{25}$

$\frac{3}{5}$ es la fracción cuyo cuadrado es igual a $\frac{9}{25}$

$\frac{3}{5}$ es la raíz cuadrada de $\frac{9}{25}$ $\left\langle \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \right\rangle$

1	2	3	16	17
4	5	6	18	19
7	8	9	20	21
10	11	12	22	23
13	14	15	24	25

La raíz cuadrada de una fracción es un número cuyo cuadrado es igual a la fracción.

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Observa: $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{9}$

Cálculo de la raíz cuadrada de una fracción

- **El numerador y el denominador son cuadrados perfectos**

Para calcular $\sqrt{\frac{81}{121}}$, como $\begin{cases} 81 = 9^2 \\ 121 = 11^2 \end{cases}$

$$\sqrt{\frac{81}{121}} = \sqrt{\frac{9^2}{11^2}} = \frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{11^2}} = \frac{9}{11} \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{121}} = \frac{9}{11}$$

Raíz cuadrada del numerador partido por raíz cuadrada del denominador

- **El numerador o el denominador no son cuadrados perfectos**

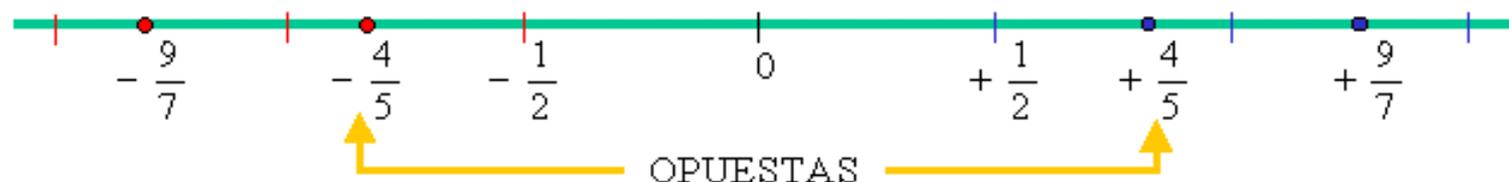
Para calcular $\sqrt{\frac{45}{25}}$, como $\frac{45}{25} = 1,8 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{1,8} \approx 1,3$

Para calcular la raíz cuadrada de una fracción cuyos dos términos no son cuadrados perfectos:

- Se calcula el cociente de los términos.
- Se halla la raíz cuadrada del cociente con la aproximación que se desee.

Fracciones positivas y negativas

Observa:



OPERACIONES

SUMA

$$-\frac{4}{10} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{12}{30} + \left(-\frac{20}{30}\right) = -\frac{32}{30} = -\frac{16}{15}$$

PRODUCTO

$$\frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\left[\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 6}\right] = -\frac{20}{42} = -\frac{10}{21}$$

COCIENTE

$$-\frac{6}{7} : \frac{3}{5} = -\left(\frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 3}\right) = -\frac{30}{21} = -\frac{10}{7}$$

POTENCIA

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(\frac{3^3}{4^3}\right) = -\frac{27}{64} \qquad \left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$$

Las operaciones con fracciones negativas se hacen igual que las operaciones con fracciones positivas, pero en cada caso hay que tener en cuenta las reglas de los signos.

Resolución de problemas

PROBLEMA

Un joyero vende una colección de monedas a tres clientes. El primero compra la mitad de la colección y media moneda. El segundo compra la mitad de las que quedan y media moneda. El tercero compra la mitad de las monedas que han quedado y media moneda; con ello se terminan las monedas. ¿Cuántas monedas tenía la colección?

—● Tantear para comprender mejor el enunciado

¿Puede tener la colección 18 monedas?

El primer cliente compraría 9,5 monedas.

Habría que partir una moneda.

El número de monedas debe ser impar.

¿11?; ¿15? ¿17?

—● Empezar por el final

¿Cuántas monedas se encuentra el tercer cliente?

Como tras él se terminan las monedas, la media moneda que recibe es la mitad de lo que quedaba.

→ Quedaba una moneda.
Y la compra.

→ La mitad de lo que encuentra el segundo son una y media monedas: $1 + \frac{1}{2}$
El segundo compra dos monedas: una y media más media = 2.

→ La mitad de lo que encuentra el primero son tres y media monedas: $3 + \frac{1}{2}$
El primer cliente compra 4 monedas: tres y media más media = 4.

La colección tenía 7 monedas: $4 + 3 + 1$