Las potencias: una forma abreviada de escribir ...

La unidad de memoria de un ordenador es un byte. Un kb, o simplemente k, es:
$1 \text{ k} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$ bytes.

2^{10} es una potencia de base 2 y exponente 10.

$2^{10} = 1\,024$

2^{10} ← exponente
← base

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

- La **base** de la potencia es el factor que se repite.
- El **exponente** indica el número de veces que se repite.

Un cuadrado es una potencia de exponente 2: 7^2 es el cuadrado de 7.

Un cubo es una potencia de exponente 3: 8^3 es el cubo de 8.

Otros ejemplos:

(a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

(b) $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7\,776$

Potencias de base un entero negativo

Observa las siguientes potencias de base negativa:

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$$

Son multiplicaciones con un número **impar** de factores negativos.

Los resultados son enteros negativos.

$(-) \cdot (-) = +$

$(-) \cdot (-) \cdot (-) = -$

$(-) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-) = +$

Fíjate ahora:

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$(-6)^6 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 46\ 656$$

Son multiplicaciones con un número **par** de factores negativos.

Los resultados son enteros positivos.

Las potencias de base negativa y exponente impar son negativas.
Las potencias de base negativa y exponente par son positivas.

Son negativas: (a) $(-2)^3 = -8$ (b) $(-4)^3 = -64$ (c) $(-1)^7 = -1$

Son positivas: (a) $(-2)^6 = 64$ (b) $(-4)^2 = 16$ (b) $(-1)^8 = 1$

Producto de potencias de la misma base

$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{2 factores}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{4 factores}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{5 factores}} = 3^{11} = 3^{2+4+5}$$

$\longrightarrow$ 11 factores

El **producto de varias potencias de la misma base** es una potencia:
- con la misma base;
- con el exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

Un caso especial

$6^1 = 6$; $(-13)^1 = -13$

$a^1 = a$

Todo número entero puede escribirse como una potencia de base el entero y exponente 1.

Ejemplos:

1. $(-4)^2 \cdot (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5 = -1\,024$, utilizando la propiedad vista.
También es igual a: $16 \cdot (-64) = -1\,024$, haciendo los productos de las potencias.

2. En forma de potencia, la expresión:

$$(-5)^3 \cdot (-5)^4 \cdot 25 = (-5)^3 \cdot (-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^9$$

Cociente de potencias de la misma base

$$(-3)^5 : (-3)^2 = \frac{\cancel{(-3)} \cdot \cancel{(-3)} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{\cancel{(-3)} \cdot \cancel{(-3)}} = (-3)^3 = (-3)^{5-2}$$

$$\boxed{(-3)^5 : (-3)^2 = (-3)^{5-2}}$$

El **cociente de dos potencias de la misma base** es una potencia que tiene:

· la misma base;

· el exponente igual a la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

Un caso especial

El cociente $6^4 : 6^4 = 1$

Pero si aplicamos la propiedad, $6^4 : 6^4 = 6^{4-4} = 6^0$

Se admite que:

$6^0 = 1$; $(-13)^0 = 1$

$a^0 = 1$

Ejemplos:

1. $(-2)^7 : (-2)^3 = (-2)^{7-3} = (-2)^4$

2. $(-5)^6 : (-5)^3 = (-5)^{6-3} = (-5)^3$

Potencia de una potencia

$(-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2$ es un producto de cuatro factores iguales.

Por tanto, puede escribirse como potencia de base $(-3)^2$ y exponente 4.

Se dice que es una **potencia de potencia.**

$$\underline{[(-3)]^4} = (-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2 = (-3)^{2+2+2+2} = \underline{(-3)^{2 \cdot 4}} = (-3)^8$$

Una **potencia de una potencia** es otra potencia que tiene:

· la misma base que la potencia de partida;

· el exponente igual al producto de los exponentes.

Ejercicio. Escribe en forma de potencia los cuadrados y los cubos de las siguientes potencias

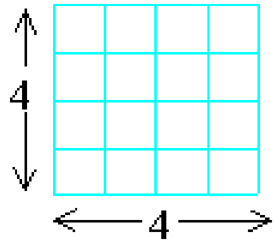
1. $(-3)^3 \longrightarrow [(-3)^3]^2 = (-3)^6 \quad [(-3)^3]^3 = (-3)^9$
2. $5^2 \longrightarrow [(5^2)]^2 = 5^4 \quad [(5^2)]^3 = 5^6$
3. $(-7)^4 \longrightarrow [(-7)^4]^2 = (-7)^8 \quad [(-7)^4]^3 = (-7)^{12}$

Cuadrados perfectos

$4^2 = 16$ es una potencia de base 4 y exponente 2. Es un cuadrado perfecto.

La base, 4, es su raíz cuadrada exacta: $\sqrt{16} = 4$

$$\boxed{\sqrt{16} = 4 \Longrightarrow 4^2 = 16}$$



Podemos pensar en 4^2 como un cuadrado de superficie 16 y lado 4.

· Si $16^2 = 256$, 16 es la raíz cuadrada exacta de 256

· Si 23 es la raíz cuadrada exacta de un número, el número es $23^2 = 529$.

> La **raíz cuadrada exacta** de un número es otro número cuyo cuadrado es igual al primero.
> Solamente los cuadrados perfectos tienen raíz cuadrada exacta.

Observa:

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$

Un cuadrado perfecto solamente puede terminar en una de las cifras siguientes: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Raíz cuadrada entera

El número 43 no es un cuadrado perfecto.

Por tanto, no representa un cuadrado ni tiene raíz cuadrada exacta.

Observa:

$$6^2 = 36 < 43 < 7^2 = 49$$

6 es el mayor entero cuyo cuadrado es menor que 43.

Se dice que 6 es la raíz cuadrada entera de 43, y se escribe: $\sqrt{43} = 6$

Como $43 - 6^2 = 7$, el resto de la raíz cuadrada entera de 43 es 7.

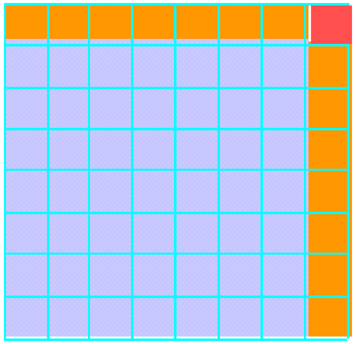
La **raíz cuadrada entera** de un número es el mayor entero cuyo cuadrado es menor que dicho número.
El resto de la raíz cuadrada de un número es igual a la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz entera.

Ejemplos:

Número:	35	**36**	37	42	**43**	44	48	**49**	50
Raíz:	5	**6**	6	6	**6**	6	6	7	7
Resto:	9	**0**	1	6	7	8	12	**0**	1

Condición del resto de una raíz cuadrada

Observa la figura al margen.



Para pasar del cuadrado de un número al cuadrado del siguiente hay que añadir:

· dos filas de cuadraditos.

· el elemento de la esquina.

Esto es: el cuadrado de un número entero es igual al cuadrado del anterior más el doble del entero anterior más 1. Luego:

El resto de la raíz cuadrada entera debe ser menor que el doble de la raíz más 1.

Resto < 2 · raíz + 1

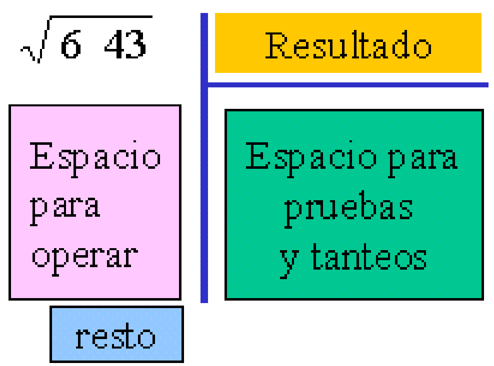
Regla para el cálculo de la raíz cuadrada (I)

La regla tradicional para el cálculo de la raíz entera de un número requiere una organización específica que indicamos a continuación.

Para calcular la raíz de un número, por ejemplo $\sqrt{643}$

1º. Se divide el radicando en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. El número de grupos es igual al número de cifras de la raíz cuadrada. $\sqrt{\underline{6}\ \underline{43}}$

2º. Se trazan líneas que faciliten la aplicación de la regla.



3º. Esta regla tiene pasos parecidos a los empleados en la división; también se restará y se bajarán cifras, pero en este caso por grupos de dos cifras.

4º. El último paso consistirá en la comprobación: en la prueba de la radicación:

$$643 = (\text{raíz})^2 + \text{resto}$$

Regla para el cálculo de la raíz cuadrada (II)

Calculemos $\sqrt{643}$

1.º Dividir el radicando en grupos de dos cifras, empezando por la derecha.

2.º Se calcula la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda: $\sqrt{6} = 2$

3.º Restar del primer grupo el cuadrado de su raíz entera.

Añadir a la diferencia las dos cifras siguientes del radicando.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6\ \ 43} & 2\ \ 5 \\ \hline -4 & 45 \cdot 5 = 225 \\ \hline 2\ \ 43 & \\ -2\ \ 25 & \\ \hline 18 & \end{array}$$

4.º Multiplicar por 2 la primera cifra de la raíz: $2 \cdot 2 = 4$. Calcular el mayor entero d tal que $4d \cdot d$ se pueda restar del radicando; d será la segunda cifra de la raíz. Ese número es 5: $45 \cdot 5 = 225$

5.º Restar de la diferencia anterior $45 \cdot 5 = 225$.

Luego: $\sqrt{643} = 25$ y el resto $= 18$.

· **Comprobación**:

$$25^2 + 18 = 625 + 18 = 643$$

Aproximación decimal de la raíz cuadrada

Continuamos con $\sqrt{643}$

6.º Colocar la coma decimal en la raíz y en el radicando.
Añadir al radicando y al resto anterior un grupo de dos ceros.

$\sqrt{643,00}$	2 5,3
-4	
2 43	$45 \cdot 5 = 225$
$-2\ 25$	$503 \cdot 3 = 1509$
1800	
-1509	
291	

7.º Multiplicar por 2 la raíz entera: $25 \cdot 2 = 50$ y encontrar el mayor entero d tal que $50d \cdot d$ sea menor que 1 800.

Ese número es 3: $503 \cdot 3 = 1509$.

3 es la primera cifra decimal de la raíz.

8.º Restar 1509 del resto anterior:
$1800 - 1509 = 291$

Luego: $\sqrt{643} = 25{,}3$ y el resto $= 2{,}91$.

· **Comprobación:**

$$25{,}3^2 + 18 = 640{,}09 + 2{,}91 = 643$$

Operaciones con raíces cuadradas

Observa:

$$7 \xrightarrow[\text{cuadrado}]{\text{Elevar al}} 7^2 \xrightarrow[\text{cuadrada}]{\text{Raíz}} 7$$

Podemos escribir: $\sqrt{7^2} = 7$

La raíz cuadrada de una cuadrado perfecto es la base del cuadrado.

Producto de raíces cuadradas exactas

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{36}\cdot\sqrt{81} = 6\cdot 9 = 54 \\ \sqrt{36\cdot 81} = \sqrt{6^2\cdot 9^2} = \sqrt{(6\cdot 9)^2} = 6\cdot 9 = 54 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sqrt{36}\cdot\sqrt{81} = \sqrt{36\cdot 81}}$$

El producto de dos o más raíces cuadradas exactas:

- es una raíz cuadrada exacta;
- su radicando es igual al producto de los radicandos de los factores.

Potencia de una raíz cuadrada

Calculamos $\left(\sqrt{25}\right)^4$

$$\left(\sqrt{25}\right)^4 = \left(\sqrt{25}\right)\cdot\left(\sqrt{25}\right)\cdot\left(\sqrt{25}\right)\cdot\left(\sqrt{25}\right) = \sqrt{25\cdot 25\cdot 25\cdot 25} = \sqrt{25^4}$$

Por tanto: $$\boxed{\left(\sqrt{25}\right)^4 = \sqrt{25^4}}$$

La potencia de base una raíz cuadrada exacta:
· es una raíz cuadrada exacta;
· su radicando es igual al radicando de partida elevado al exponente de la potencia.

EJERCICIO RESUELTO

Escribir $\left(\sqrt{81}\right)^3$ como raíz cuadrada y hallar su valor.

$$\left(\sqrt{81}\right)^3 = \sqrt{81^3}$$

$$\sqrt{81^3} = \sqrt{(9^2)^3} = \sqrt{9^6} = \sqrt{(9^3)^2} = 9^3 = 729$$

Resolución de problemas (I)

PROBLEMA

Una piscina cuadrada se amplía. La piscina nueva es también cuadrada. Su perímetro aumenta en 12 m y su superficie en 57 m^2. ¿Cuál era la superficie de la piscina primitiva?

Leer el enunciado y resumirlo

Tenemos una piscina cuadrada. Se quiere ampliar y que siga siendo cuadrada.

El perímetro aumenta en 12 m. Su superficie en 57 m^2.

Hay que averiguar la superficie de la piscina de partida

Tantear para comprender mejor el problema

Si el lado fuera 6 m su perímetro sería de 24 m y su superficie de 36 m^2.

El perímetro aumentado sería de $24 + 12 = 36$ m.

Entonces, el lado valdría 9 m ($36 : 4 = 9$), y la superficie 81 m^2 (9^2).

Si la superficie inicial, 36, aumenta en 57 m^2 se tiene $36 + 57 = 83$ m^2.

El lado no puede ser 6 m, pues $81 \neq 83$

Resolución de problemas (II)

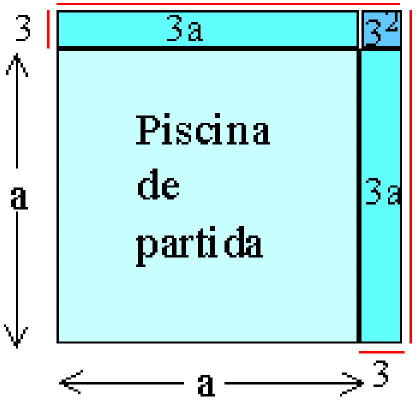
PROBLEMA

Una piscina cuadrada se amplía. La piscina nueva es también cuadrada. Su perímetro aumenta en 12 m y su superficie en 57 m^2. ¿Cuál era la superficie de la piscina primitiva?

Hacer un dibujo

Representamos la piscina y su ampliación.

El perímetro aumenta en los cuatro segmentos señalados en rojo.



Resolver el problema

El aumento del lado es de 3 m (12 : 4).

Si a es el lado de la superficie inicial y la superficie aumenta 57 m^2, se tiene:

$3 \cdot a + 3 \cdot a + 3^2 = 57$ → $6a = 48$ → $a = 8$

El lado de la piscina medía 8 m y la superficie era de 64 m^2.

Comprobación

Piscina de partida: lado $a = 8$ m; superficie, $s = 64\ m^2$
Piscina ampliada: lado $a' = 11$ m; superficie, $s' = 121\ m^2$

$a' = a + 3$
$s' = s + 57$