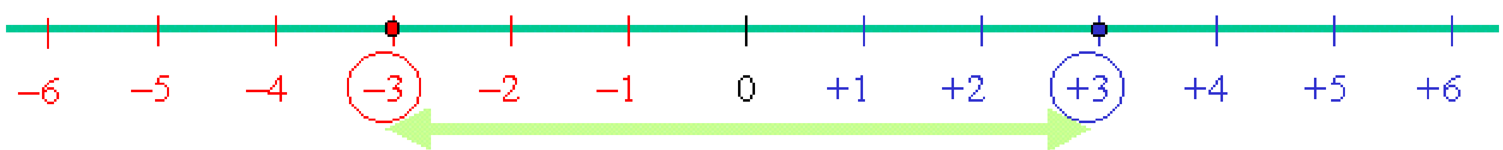
Los números enteros

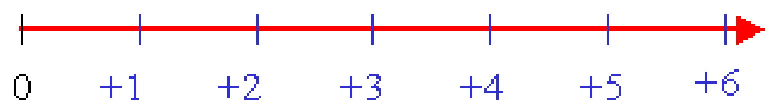
Ampliación de los números naturales

Los número naturales se consideran enteros positivos.
Por cada entero positivo se añade un entero negativo.

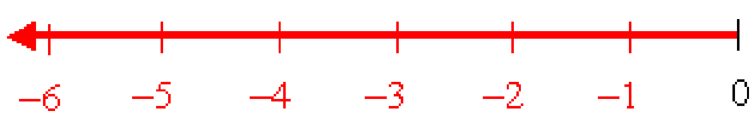
Por ejemplo, a 3 se le añade –3.



Los enteros positivos se sitúan en la recta a la derecha del cero



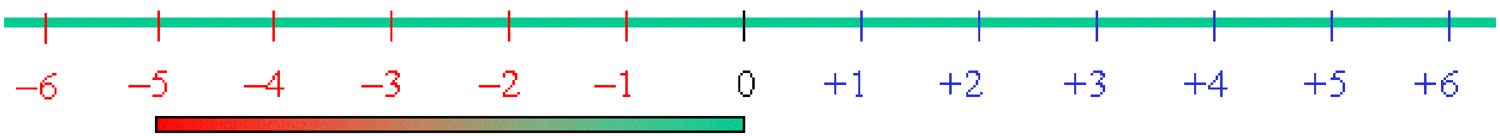
Los enteros negativos están a la izquierda del cero



Valor absoluto de un número entero

El número –5 está situado a 5 unidades de distancia de 0.

Se dice que –5 tiene un valor absoluto igual a 5, y se escribe $|-5| = 5$



$$|-5| = 5$$

Un **número entero** está formado por:

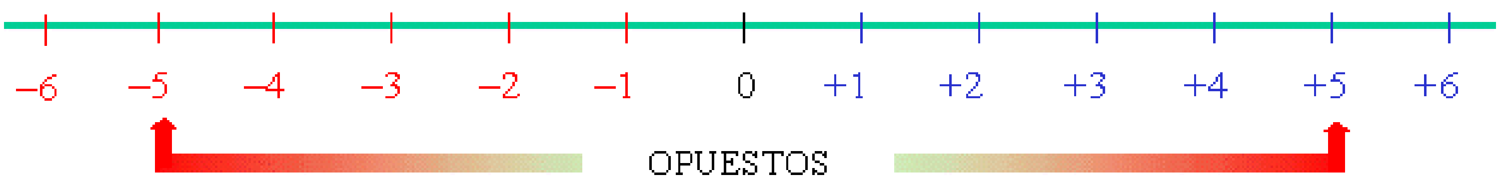
– Un signo (+ o –) que indica si es positivo o negativo.

– Un número que sigue al signo y representa su valor absoluto.

Ejemplos: $|-8| = 8$ $\quad |7| = 7$ $\quad |-12| = 12$

Enteros opuestos

Observa –5 y 5 en la recta numérica:



Están a la misma distancia de 0.

Son simétricos respecto de 0.

Tienen el mismo valor absoluto: $|-5| = |5| = 5$

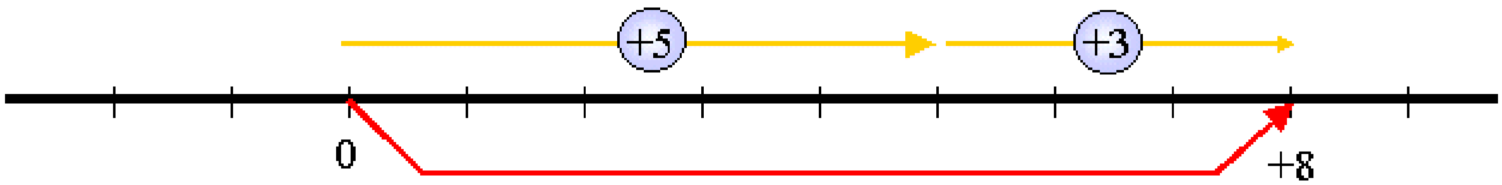
Se dice que 5 y –5 son **enteros opuestos.**

Dos números enteros son **opuestos** si tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo.

Suma de dos números enteros

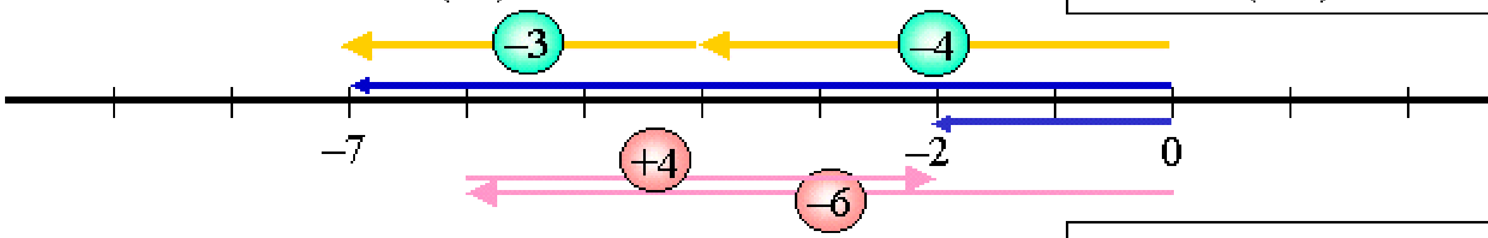
Calculamos: $(+5) + (+3)$

$5 + 3 = 8$



Calculamos. $-4 + (-3)$

$-4 + (-3) = -7$



Calculamos: $-6 + (+4)$

$-6 + (+4) = -2$

· Para sumar dos números enteros del **mismo signo**, se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo que tienen los sumandos.

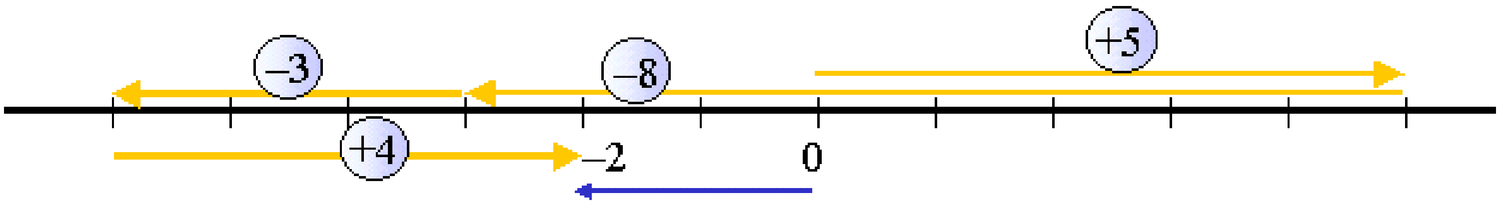
· Para sumar dos números enteros de **distinto signo:**

– Se restan sus valores absolutos (al mayor se le resta el menor).

– Se pone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Suma de varios números enteros

Calculamos: $(+5) + (-8) + (-3) + (+4)$



· Para sumar varios números enteros de **distinto signo:**
- Se suman separadamente los enteros positivos y negativos.
- Se suman el entero positivo y el negativo obtenidos.

$$\underline{5} + (\underline{-8}) + (\underline{-3}) + \underline{4} = \underline{9} + (\underline{-11}) = -2$$

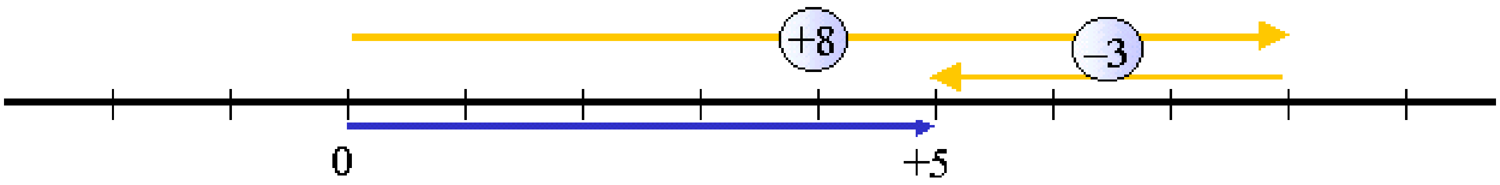
Ejemplos:

$4 + (-6) + 9 + (-2) + 7 = 20 + (-8) = 12$

$-6 + (-7) + 4 + (-3) = -16 + 4 = -12$

Resta de números enteros

Calculamos: $8 - 3$



· Para restar dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$8 - 3 = 8 + (-3) = +5$$

Ejemplos:

a) $-7 - 9 = -7 + (-9) = -16$

b) $-7 - (-9) = -7 + 9 = 2$

c) $-6 - (-6) = -6 + 6 = 0$

d) $6 - (-6) = 6 + 6 = 12$

e) $-2 + 4 - 7 = 4 - 9 = -5$

f) $9 + (-3) - (-5) = 9 - 3 + 5 = 11$

Multiplicación de números enteros

Fíjate: $(-9) \cdot (+4) = -(9 \cdot 4) = -36$ $(-7) \cdot (-9) = +(7 \cdot 9) = +63$

Para calcular el producto de dos números enteros:

– Se calcula el producto de los valores absolutos de los factores.

– Al resultado obtenido se le pone el signo + si los factores tienen el mismo signo, y el signo – si los factores tienen signo distinto.

REGLA DE LOS SIGNOS

$(+8) \cdot (+9) = +(8 \cdot 9) = +72$	$\longleftrightarrow$	$+ \cdot + = +$
$(+8) \cdot (-9) = -(8 \cdot 9) = -72$	$\longleftrightarrow$	$+ \cdot - = -$
$(-8) \cdot (+9) = -(8 \cdot 9) = -72$	$\longleftrightarrow$	$- \cdot + = -$
$(-8) \cdot (-9) = +(8 \cdot 9) = +72$	$\longleftrightarrow$	$- \cdot - = +$

Propiedades de la multiplicación

1. Propiedad conmutativa

$\boxed{-8 \cdot (7)} = -(8 \cdot 7) = -(7 \cdot 8) = \boxed{7 \cdot (-8)}$

$\boxed{-12 \cdot (-5)} = +12 \cdot 5 = +(5 \cdot 12) = \boxed{-5 \cdot (-12)}$

El orden de los factores no altera el resultado del producto.

El producto de números enteros no varía cuando los factores se asocian de modos distintos

2. Propiedad asociativa

$$\left.\begin{array}{l} -9 \cdot [5 \cdot (-3)] = -9 \cdot (-15) = 135 \\ (-9 \cdot 5) \cdot (-3) = -45 \cdot (-3) = 135 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-9 \cdot [5 \cdot (-3)] = (-9 \cdot 5) \cdot (-3)}$$

Propiedad distributiva

$$-12 \cdot [-17 + (-5)] = -12 \cdot (-22) = 264$$

$$-12 \cdot (-17) + (-12) \cdot (-5) = 204 + 60 = 264$$

$$\boxed{-12 \cdot [-17 + (-5)] = -12 \cdot (-17) + (-12) \cdot (-5)}$$

– De otro modo: sacar factor común

$$\boxed{-5 \cdot 12 + (-5) \cdot (-8) + 30} = -5 \cdot 12 + (-5) \cdot (-8) + (-5) \cdot (-6) = \boxed{-5 \cdot [12 + (-8) + (-6)]}$$

$$\boxed{-5 \cdot 12 + (-5) \cdot (-8) + 30 = -5 \cdot [12 + (-8) + (-6)]}$$

La suma de varios números enteros puede escribirse en forma de multiplicación si todos los sumandos poseen un factor común.

La propiedad distributiva permite:

1. Escribir una multiplicación en forma de suma

2. En algunos casos, sacar factor común: escribir una suma en forma de multiplicación

División exacta

Cada multiplicación lleva asociadas dos divisiones exactas:

$(-9) \cdot 4 = -36$

- $-36 : (-9) = 4 = +(36 : 9)$
- $-36 : 4 = -9 = -(36 : 4)$

$(-7) \cdot (-9) = 63$

- $\underline{63 : (-7)} = -9 = -\underline{(63 : 7)}$
- $\underline{63 : (-9)} = -7 = -\underline{(63 : 9)}$

SIGNOS

+ : + = +
+ : – = –
– : + = –
– : – = +

Para calcular el cociente de dos números enteros:

– Se halla el cociente de sus valores absolutos.

– Al resultado se le pone el signo + si los dos enteros tienen el mismo signo, y el signo – si los dos enteros tienen distinto signo.

Ejemplos:

(a) $-15 : (-5) = +(15 : 5) = 3$

(b) $(-54) : (+9) = -(54 : 9) = -6$

(c) $35 : (-7) = -5$

(d) $72 : (-9) = -8$

Operaciones sin paréntesis (I)

Ejemplo 1. Calculamos: $-8 \cdot 7 + 15 \cdot (-2)$

1º. Multiplicaciones

2º. Sumas

$-56 + (-30) = -86$

Ejemplo 2. Calculamos ahora: $-56 : 4 - (-5) \cdot (-3)$

$-14 \quad -15 \quad = -29$

> Para realizar operaciones con números enteros en las que no haya paréntesis, se sigue este orden:
> 1. Se hacen las multiplicaciones y las divisiones.
> 2. Se hacen las sumas y las restas.

Ejercicio propuesto Realiza las siguientes operaciones:

a) $-16 + 8 \cdot (-4) \longrightarrow -16 + 8 \cdot (-4) = -16 + (-32) = -48$

b) $-14 \cdot 21 - 32 : (-4) \longrightarrow -14 \cdot 21 - 32 : (-4) = -294 + 8 = -286$

Operaciones sin paréntesis (II)

Ejemplo 1. Calculamos: $-20 + 16 - (-12)$

Puede hacerse asociando los sumandos de las siguientes maneras:

$$\boxed{-20 + 16} - (-12) = \boxed{-4} - (-12) = -4 + 12 = 8$$

$$-20 + \boxed{16 - (-12)} = -20 + \boxed{28} = 8$$

$$\boxed{-20} + 16 \boxed{-(-12)} = \boxed{-8} + 16 = 8$$

Ejemplo 2. Calculamos: $-12 \cdot 18 \cdot (-6)$

Puede hacerse asociando los factores de las siguientes maneras:

$$\boxed{-12 \cdot 18} \cdot (-6) = \boxed{-216} \cdot (-6) = 1\ 296$$

$$-12 \cdot \boxed{18 \cdot (-6)} = -12 \cdot \boxed{(-108)} = 1\ 296$$

$$\boxed{-12} \cdot 18 \cdot \boxed{(-6)} = \boxed{72} \cdot 18 = 1\ 296$$

Se puede seguir el orden que se prefiera cuando:

- En las operaciones hay solamente sumas y restas.
- En las operaciones hay solamente multiplicaciones y divisiones.

Operaciones con paréntesis (I)

Observa:

$$36 : 2 + 7 = 18 + 7 = 25$$

$$36 : (2 + 7) = 36 : 9 = 4$$

El paréntesis afecta al orden que se ha de seguir para operar y al resultado final

Para realizar una serie de operaciones con números enteros, se sigue este orden:

1.º Se resuelven los paréntesis incluidos en cada corchete.
2.º Se resuelven los corchetes.
3.º Se hacen las multiplicaciones y las divisiones.
4.º Se hacen las sumas y las restas.

Ejemplo: Calculamos $-12 \cdot 3 + 36 : (\underline{-12 : 6 + 8}) - 15$

Se resuelve el paréntesis

$$\underline{-12 \cdot 3} + \underline{36 : 6} - 15$$

Se hacen multiplicaciones y divisiones

$$\underline{-36 + 6 - 15}$$

Se hacen las sumas

$$-45$$

Operaciones con paréntesis (II)

Ejemplo. Calculamos las siguientes operaciones:

$$-3 \cdot [(-12 + 36) : 6 - 11] - 15 : [(-20 + 12) \cdot 3 + (-7) \cdot (-3)] - 9$$

Se resuelve el paréntesis incluido en los corchetes

$$-3 \cdot [24 : 6 - 11] - 15 : [-8 \cdot 3 + 21] - 9$$

Se resuelven los corchetes

$$-3 \cdot (-7) - 15 : (-3) - 9$$

Se hacen multiplicaciones y divisiones

$$21 + 5 - 9$$

Se hacen las sumas

$$17$$

Ejercicio. Calcula $-8 \cdot [(-18 + 6 \cdot 2) : 3 + (-20 : 5 + 2) : (-2)]$

$= -8 \cdot [(-18 + 12) : 3 + (-4 + 2) : (-2)]$

$= -8 \cdot [(-6) : 3 + (-2) : (-2)] = -8 \cdot [-2 + 1] = -8 \cdot (-1) = 8$

Resolución de problemas (I)

PROBLEMA

Nacho ha decidido repartir entre sus primos los sellos que tiene repetidos. Puede hacerlo de dos maneras: dando 1 sello al mayor, 2 al siguiente, 3 al tercero, y así sucesivamente, o dando 5 a cada uno. ¿Cuántos sellos repetidos tiene Nacho?

Leer atentamente el enunciado

Observamos que no se dice cuántos primos tiene Nacho.

Tampoco cuántos sellos tiene repetidos; pero a cada primo le da 5.

Tantear para comprender mejor el problema

Supongamos que Nacho tiene 20 sellos repetidos. Si da 5 sellos a cada primo, hay $20 : 5 = 4$ primos.

Repartidos de la primera manera, debía haber $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ sellos.

No puede ser, pues $10 \neq 20$

¿Y si tuviera $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ sellos?

Entonces serían 5 primos y con 15 sellos no podrían recibir 5 cada uno.

Luego el número de sellos debe cumplir dos condiciones:

· Ser del tipo $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

· Ser múltiplo de 5.

Resolución de problemas (II)

PROBLEMA

Nacho ha decidido repartir entre sus primos los sellos que tiene repetidos. Puede hacerlo de dos maneras: dando 1 sello al mayor, 2 al siguiente, 3 al tercero, y así sucesivamente, o dando 5 a cada uno. ¿Cuántos sellos repetidos tiene Nacho?

Hemos observado que el número de sellos debe cumplir dos condiciones:

· Ser del tipo $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ · Ser múltiplo de 5.

Hacer una tabla

Hacemos una tabla con los números de cada tipo:

Múltiplos de 5	5, **10**, **15**, 20, 25, 30, 35, 40, **45**, 50
Núm. $1 + 2 + 3 + \ldots$	3, 6, **10**, **15**, 21, 28, 36, **45**, 55, ...

Posibles soluciones: 10, 15, 45, ...

Realizar los cálculos y dar la solución

Hemos visto que las soluciones 10 y 15 no son posibles. (¿Lo recuerdas?)

45 es otro número que está en las dos filas de la tabla:

· Si hubiera 45 sellos, entonces habría $45 : 5 = 9$ primos.

· Y el número debería ser: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

Nacho tiene 45 sellos repetidos.