TEMA 8

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Contenidos

1. Experiencias aleatorias.
2. Sucesos.
3. Idea intuitiva de probabilidad. Definición clásica.
4. Propiedades de una probabilidad.
5. Regla de Laplace.
6. Probabilidad condicionada. Dependencia de sucesos.
7. Experiencias compuestas.
8. Probabilidad total.
9. Fórmula de Bayes: Probabilidad a posteriori.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conocer y manejar la terminología básica: suceso, clases de sucesos, representaciones de Venn, operaciones,…
2. Interpretar probabilidades y asignarlas a sucesos a través de la Regla de Laplace.
3. Conocer las propiedades elementales de la función de probabilidad.
4. Calcular probabilidades condicionadas y determinar si dos sucesos son independientes o no.
5. Saber calcular la probabilidad de sucesos compuestos usando diagramas de árbol, tablas de contingencia y el teorema de probabilidad total.
6. Comprender qué es el cálculo de una probabilidad a posteriori y efectuarlo con el Teorema de Bayes.

1.Experiencias aleatorias

La Ciencia trata de encontrar las leyes por las que se rigen los fenómenos que observamos. Para establecerlas se realizan experiencias en las que dichos fenómenos se producen en unas mismas condiciones.

El poder de la Ciencia viene de su capacidad de predicción. Una encontrada una ley podemos "predecir el futuro": si repetimos la experiencia bajo ciertas condiciones podemos anticipar el resultado.

Por ejemplo: subamos a la azotea de un edificio en un día con ausencia de viento y abandonemos una piedra sobre el suelo. Podemos afirmar que la piedra caerá. Y además podemos señalar en qué lugar caerá –la vertical–. Incluso podemos calcular la velocidad con la que impactará contra el suelo.

En esta situación tenemos que el efecto está determinado por ciertas causas, las consecuencias ocurrirán necesariamente.

Frente a esta clase de fenómenos hay otros en los que no podemos prever cuál será el resultado. Por ejemplo:

- Lanzamos una moneda y sale cara. Si repetimos, ¿qué obtendremos?
- De un mazo con una baraja española sacamos una carta, sin mirar. ¿Qué carta habremos extraído?
- En una bolsa hay diez bolas idénticas que hemos numerado del 1 al 10. Extraemos una de las bolas. Es claro que llevará necesariamente uno de esos diez números, pero es imposible predecir cuál será.

En estos casos, la totalidad de las circunstancias que influyen en le resultado escapa a nuestro conocimiento, el resultado es la consecuencia de la suma de una cantidad de factores que no podemos ni distinguir ni controlar. Decimos que el resultado es consecuencia del azar.

Y esas experiencias o fenómenos cuyo resultado se atribuye al azar se denominan aleatorios:

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella en la que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados, pero no es posible predecir cuál sucederá.

☞ Ejemplo: lanzamos dos dados sobre una mesa y deseamos averiguar cuál será la suma de las puntuaciones que se obtendrán: estamos ante un fenómeno aleatorio.

☞ Ejemplo: tenemos una urna con cinco bolas blancas y una verde. Sacamos, sin mirar, una de ellas al azar. Si nos preguntamos por el color que tendrá estamos ante una experiencia aleatoria.

En las experiencias aleatorias es imposible hallar reglas determinísticas, leyes que rijan la aparición de cada resultado. Pero eso no significa que el azar no esté gobernado por ninguna ley. Aunque pueda parecer paradójico, el azar tiene sus propias leyes. Hay dos ramas de la Matemática que dedican a su estudio: el Cálculo de Probabilidades y la Estadística.

El estudio de los fenómenos regidos por el "azar" y del cálculo de probabilidades comenzó en 1654.
Un aristócrata francés conocido como el "caballero de Mère", interesado por los juegos y las apuestas, preguntó al matemático Pascal por una aparente contradicción en un juego de dados.
El juego consistía en lanzar 24 veces un par de dados; y se trataba de apostar a favor o en contra de la aparición de por lo menos un "seis doble". Un razonamiento sencillo le llevaba a pensar que era ventajoso apostar a favor, pero su experiencia era le señalaba lo contrario.
El caballero escribió a Pascal comentándole éste y otros problemas. Esto motivó que se iniciara un intercambio de cartas entre Pascal y otro matemático, Fermat, en las que se formularon los fundamentos del Cálculo de Probabilidades.
Sería Laplace, en 1774 el que enunciaría la primera definición que se conoce del concepto de probabilidad. Y tras sus estudios, el interés por estas cuestiones decayó hasta nuestro siglo.
A principios de éste el matemático ruso Kolmogorov construyó la base de la teoría moderna.
En tiempos recientes ha tenido un auge espectacular, de la mano de la Estadística, usándose sus conclusiones en Sociología, Psicología e incluso en la Teoría Atómica o en Química.

2.Espacio muestral. Sucesos.

Lo primero que debemos hacer al enfrentarnos al estudio de un fenómeno aleatorio es identificar el conjunto de todos los resultados posibles:

> En una experiencia aleatoria se denomina **espacio muestral** –*E*– al conjunto de todos los posibles resultados.

☞ Ejemplo: si lanzamos un dado y observamos el número que se obtiene, el espacio muestral es

$$E = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$$

☞ Ejemplo: En una urna con cinco bolas rojas y una verde sacamos dos bolas, una a continuación de la otra y sin devolución, anotando el color. El espacio muestral podría expresarse así

$$E = \{rr\,,rv\,,vr\}$$

Veremos luego que esta forma de expresarlo puede no ser una buena idea.

Podemos interesarnos no sólo por un resultado individual, sino por un conjunto de ellos. Veamos la terminología que se usa:

> En una experiencia aleatoria se denomina:
>
> ■ **Suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral *E*.
>
> ■ **Suceso elemental** al formado por un único elemento de *E*.
>
> ■ **Suceso imposible** – $\varnothing$– al que no puede ocurrir y **suceso seguro** a E.
>
> Diremos que un suceso se verifica o que ha ocurrido si el resultado es uno de sus elementos.

Observemos que los sucesos pueden definirse:
- Por comprensión: dando una propiedad característica que lo determina.
- Por extensión: enumerando cada uno de los elementos que lo componen.

☞ Ejemplo: Lanzamos un dado con seis caras numeradas del 1 al 6.

El espacio muestral es $E = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$

A = "sale par" es el suceso $A = \{2,4\,,6\}$

B = "sale impar" es el suceso $B = \{1\,,3\,,5\}$

C = "sale un cinco" es el suceso $C = \{5\}$

El suceso definido por "sale un siete" es imposible, es el suceso $\varnothing$.

El suceso definido por "sale un número del 1 al 6" es el suceso seguro. Es el propio espacio muestral *E*.

Observemos que el suceso C es elemental, pero A y B no.

☞ Ejemplo: Lanzamos un dado dos veces, y anotamos el número obtenido en cada una de las ocasiones.

El espacio muestral es el conjunto de todos las parejas de números enteros del 1 al 6.

Si A = "la suma es 3" $\rightarrow$ $A = \{1-2\,,2-1\}$

Si B = "el 1º es un 3" $\rightarrow$ $B = \{3-1\,,3-2\,,\ldots\,,3-6\}$

Los sucesos "la suma de los números es 14" o "el primer número es un 8" son sucesos imposibles. Son el suceso $\varnothing$.

☞ Ejemplo: lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz.

El espacio muestral es $E=\{cc\,,cx\,,xc\,,xx\}$.

A = "obtener dos caras" es $A=\{cc\}$

B = "obtener dos cruces" es $B=\{xx\}$

C = "obtener una cruz" es $C=\{cx\,,xc\}$

D = "sale al menos una cruz" es $D=\{cx\,,xc\,,xx\}$

Observemos que los sucesos A y B son elementales, pero que C y D no lo son.

❑ Operaciones con sucesos.

Dados dos sucesos A y B, llamamos suceso

- **unión** $(A\cup B)$ al que acontece cuando ocurre al menos uno de los dos: es el suceso formado por todos los elementos de A o de B.
- **intersección** $(A\cap B)$ al que acontece cuando ocurren ambos sucesos: es, el suceso formado por los elementos comunes de A y de B.
- **contrario** de A $(\overline{A})$ al suceso cuyos resultados no están en A.

Se dice que A y B son sucesos incompatibles cuando no tienen resultados comunes. Así, su intersección es vacía,

☞ Ejemplo: sigamos con el ejemplo anterior, en el que lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz. Se verifica:

$A\cup B=\{cc\,,xx\}$

$A\cap B=\{\}=\varnothing$

Tenemos así que A y B son sucesos incompatibles.

$B\cup C=\{cx\,,xc\,,xx\}$ (observamos que $B\cup C=D$)

$B\cap C=\{\}=\varnothing$

$\overline{D}=\{cc\}$ ("no obtener ninguna cruz" = "obtener dos caras"=A)

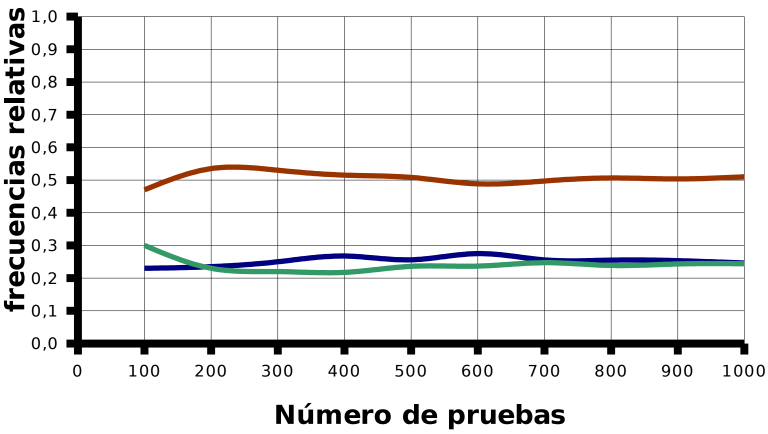
Cerramos con dos propiedades llamadas leyes de Morgan:

Para cualesquiera sucesos A y B en una experiencia aleatoria se cumple

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \text{ y } \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

3.Noción clásica de probabilidad

Se ha simulado con ordenador mil veces la realización de la experiencia aleatoria anterior, sin trampas, obteniendo los siguientes resultados:



Para simular una experiencia así basta un ordenador personal que tenga instalada una hoja de cálculo.
La función que se usa es "random" o "generación de números aleatorios". ¡Anímate y hazlo!

Observemos cómo las frecuencias relativas de cada uno de los sucesos se estabilizan hacia ciertos valores, a los cuales se denominan probabilidades.

En nuestro caso, es de esperar que en una "serie ilimitada":

S_1 aparezca en el 50% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(S_1) = 0,5 = \frac{1}{2}$

S_2 aparezca en el 25% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(S_2) = 0,25 = \frac{1}{4}$

S_3 aparezca en el 25% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(S_3) = 0,25 = \frac{1}{4}$

Pasamos a la llamada "definición clásica" de la probabilidad:

Consideremos un exp. aleatorio que se repite N veces.

Cuando $N \rightarrow \infty$ la frecuencia relativa de cada suceso A "se estabiliza" en torno a cierto valor $p(A)$, que llamaremos **probabilidad** del suceso A.

Se llama frecuencia relativa de un suceso al número de veces que aparece entre el número total de veces que se repite el experimento.

☞ Ejemplo: he simulado con un ordenador el lanzamiento de una moneda 100.000 veces, y he obtenido:

$$fr(cara) = \frac{49.968}{100.000} = 0{,}49968 \quad , \quad fr(cruz) = \frac{52.032}{100.000} = 0{,}50032$$

Como vemos, corrobora la idea de asignar un 50% de posibilidades a cada uno de los sucesos elementales.

4. Propiedades de la probabilidad

Cuando calculamos probabilidades en un experimento aleatorio, asignamos a cada suceso S un número, $p(S)$, que representa una frecuencia ideal:

1. Debe ser un número comprendido entre 0 (probabilidad del suceso imposible) y 1 (la del suceso seguro, que ocurre el 100% de las veces).
2. Un suceso y su contrario incluyen todos los resultados, así que juntos cubren el 100% de los casos, luego la suma de sus probabilidades es 1
3. Dados A y B, la frecuencia de su unión es la suma de sus frecuencias menos el número de repetidos, por ello debe ser

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

De estas propiedades básicas se deducen otras, como son las siguientes:

Si p es una probabilidad, se verifican las siguientes propiedades:

- La probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1, de modo que

$$\mathrm{p}(\varnothing) = 0 \text{ y } \mathrm{p}(E) = 1$$

- La probabilidad del suceso contrario cumple:

$$\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\overline{A}) = 1$$

- Las probabilidades de la unión y la intersección están relacionadas por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

5.Regla de Laplace.

En algunos experimentos es fácil asignar probabilidades:

Si el espacio muestral de una experiencia consta de un número finito de resultados que están en igualdad de condiciones de suceder (son equiprobables), la probabilidad de un suceso A es:

$$\mathrm{p}(A)=\frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta sencilla regla es conocida como "Regla de Laplace"

☞ Ejemplo: Lancemos un dado y anotemos el número obtenido.

La probabilidad del suceso A = "sale a lo sumo un cuatro" es

$$\mathrm{p}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

pues hay 6 casos posibles y cuatro favorables (1 , 2 , 3 , 4)

☞ Ejemplo: en una urna hay 3 bolas rojas, 2 azules y 1 verde. Si sacamos una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Si de esta urna se extraen dos bolas: ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Aquí la Regla de Laplace puede aplicarse rápidamente y sin problemas:

$$\mathrm{p}(A)=\frac{\text{número de bolas azules}}{\text{número de bolas}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Con más detalle:

$$E=\{r_1,r_2,r_3,a_1,a_2,v_1\}\to A\{a_1,a_2\}\xrightarrow{Laplace}\mathrm{p}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

No debemos caer en el error de pensar de la siguiente forma:

$$E=\{\text{rojo}, \text{azul}, \text{verde}\}$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{p}(\text{'azul'})=\frac{1}{3}$$

☞ Ejemplo: si lanzamos dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

El espacio muestral queda (con todos los resultados equiprobables)

$$E=\{cc,cx,xc,xx\}$$

Queremos hallar la probabilidad del suceso

$$A=\text{"obtener dos caras"}=\{cc\}\xrightarrow{Laplace}\mathrm{p}(A)=\frac{1}{4}$$

No debemos caer en el error de pensar de la siguiente forma: "pueden salir dos caras , dos cruces o una cara con una cruz; así que la probabilidad de que salgan dos caras es uno de tres"

☞ Ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea 6 al lanzar dos dados?

El espacio muestral queda:

$$E=\left\{\begin{array}{ccc}1-1 & \ldots & 1-6\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 6-1 & \ldots & 6-6\end{array}\right\}\to\text{Hay } 6\times 6=36 \text{ resultados posibles.}$$

Así

$$A=\{1-5,2-4,3-3,4-3,5-1\}\xrightarrow{Laplace}\mathrm{p}(A)=\frac{5}{36}$$

6.Probabilidad condicionada

Probabilidad condicionada.

Vamos a introducir este útil concepto con la ayuda del siguiente ejemplo.

En una población de 100 personas nos hemos interesado por dos variables: el sexo y la situación laboral. La siguiente tabla resume los datos:

	Trabaja	***Está en paro***	
Hombre	30	10	40
Mujer	30	30	60
	60	40	100

Una tabla de doble entrada como esta se denomina "tabla de contingencia". Observa cómo en sus márgenes se anotan los totales de cada variable estudiada.

☞ Hallemos la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea mujer.

Si llamamos M = "escogemos una mujer", aplicando la Regla de Laplace

$$\mathrm{p}(M) = \frac{\text{número de mujeres}}{\text{número de personas}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

☞ Tomemos una persona y hallemos la probabilidad de que esté trabajando:

Si T = "escogemos una persona que trabaja", tenemos:

$$\mathrm{p}(T) = \frac{\text{número de trabajadores}}{\text{número de personas}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

☞ Si se ha elegido una mujer: ¿cuál es la probabilidad de que esté trabajando? Cuidado: la proporción de mujeres trabajadoras no es la misma que la global. Ahora lo que queremos calcular es algo así:

$$\mathrm{p}(\text{'elegir una persona trabajadora sabiendo que es mujer'})$$

Esto se escribe

$$\mathrm{p}(T/M)$$

y se lee "probabilidad del suceso T sabiendo que ha ocurrido M" o "probabilidad de T condicionada por M". Es:

$$\mathrm{p}(T/M) = \frac{\text{número de mujeres trabajadoras}}{\text{número de mujeres}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Obtén tú la probabilidad de elegir al azar:

- un hombre
- una persona en paro sabiendo que es un hombre
- un hombre sabiendo que está en paro
- un hombre en paro

☞ No debemos confundir lo anterior con la probabilidad de elegir, al azar, a una persona que sea una mujer trabajadora:

$$\mathrm{p}(T \cap M) = \frac{\text{número de mujeres trabajadoras}}{\text{número de personas}} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Pero las probabilidades condicionada y de la intersección están relacionadas:

$$\frac{\mathrm{p}(T \cap M)}{\mathrm{p}(A)} = \frac{30/100}{60/100} = \frac{30}{60} = \mathrm{p}(T/M)$$

En general:

> En un experimento aleatorio, la probabilidad de B **condicionada** por A es:
>
> $$\mathrm{p}(B/A) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(A)}$$

Por supuesto, la probabilidad de A debe ser distinta de cero.

Dependencia e independencia de sucesos.

Es una idea que veremos con este ejemplo: en una urna con 5 bolas verdes y 5 bolas blancas sacamos una bola y a continuación otra. ¿cuál es la probabilidad de que la 2ª sea verde supuesto que la 1ª ha sido verde?

☞ Si no devolvemos la 1ª bola, la primera extracción influye en el resultado de la segunda (hay una bola verde menos en la 2ª extracción). Llamando

V_1 = “la primera bola es verde” y V_2 = “la segunda bola es verde”

Tenemos

$$\mathrm{p}\,(V_2/V_1) = \frac{4}{9}$$

Decimos que “el suceso V_2 depende del suceso V_1”.

Estamos ante una extracción sin devolución.

☞ Si devolvemos la 1ª a la urna, y a continuación sacamos la otra, es claro que la primera extracción no influye en el resultado de la segunda. Ahora:

$$\mathrm{p}\,(V_2/V_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Decimos que “el suceso V_2 es independiente del suceso V_1”.

Estamos ante una extracción con devolución.

En general:

Diremos que los sucesos A y B son independientes cuando

$$\mathrm{p}\,(B/A) = \mathrm{p}\,(B)$$

Ello equivale a

$$p\,(A \cap B) = p\,(A) \cdot p\,(B)$$

Tenemos así que si unos sucesos son independientes, la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades.

Probabilidad de la intersección.

Si despejamos de la fórmula de la probabilidad condicionada, tenemos

$$\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A) \cdot \mathrm{p}\,(B/A)$$

Esto puede generalizarse a un número cualquiera de sucesos:

Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos de una exp. aleatoria entonces:

$$\mathrm{p}\,(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathrm{p}\,(A_1) \cdot \mathrm{p}\,(A_2/A_1) \cdots \mathrm{p}\,(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Por ejemplo, para que ocurran los tres sucesos A_1 y A_2 y A_3, primero ha de suceder A_1, después debe ocurrir A_2, y una vez que han sucedido A_1 y A_2 debe ocurrir A_3

☞ <u>Ejemplo</u>: en una urna hay 3 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la 1º sea roja y la 2ª azul?

Método 1: Usamos la Combinatoria:

$$\mathrm{p}\,(S) = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7}$$

Método 2: Poniendo

R_1 = “la 1ª bola es roja” y A_2 = “la 2ª bola es azul”

Tenemos:

$$\mathrm{p}\,(R_1 \cap A_2) = \mathrm{p}\,(R_1) \cdot \mathrm{p}\,(A_2/R_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

De esta urna se extraen dos bolas: ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

7.Experiencias compuestas

En ejemplos anteriores ya hemos hecho uso de la técnica consistente en considerar una experiencia como una prueba compuesta. Vamos a introducir la técnica con el un ejemplo.

Problema: De una urna con 4 bolas blancas y 3 negras extraemos dos bolas. Hallemos la probabilidad de que ambas sean negras.

Método 1: Designemos a las bolas por $b_1, b_2, b_3, b_4, n_1, n_2, n_3$. El espacio muestral tiene $7 \cdot 6 = 42$ resultados posibles, y es

A = "ambas bolas son negras" está formado por $3 \cdot 2 = 6$ elementos:

$$A = \{n_1 - n_2, n_1 - n_3, n_2 - n_1, n_2 - n_3, n_3 - n_1, n_3 - n_2\}$$

Por la Regla de Laplace:

$$\mathrm{p}(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

Método directo: consiste en la enumeración de todas las posibilidades.
Es útil por su sencillez, pero cuando el número de posibilidades es alto no es útil.

Método 2: Aplicamos la Regla de Laplace, usando la Combinatoria:

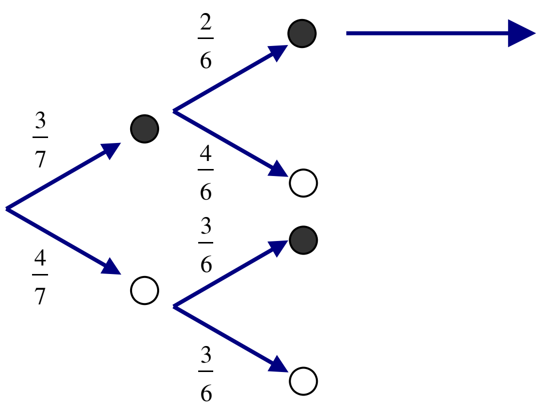
$$p(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

Método combinatorio: se basa en el uso de la Regla de Laplace, pero usando métodos de recuento adecuados para el cálculo de los casos.
Rápido y efectivo, exige conocimientos de Combinatoria y tener de antemano bien diseñada la estrategia.

Método 3: Supondremos que sacaremos una bola a continuación de la otra:

N_1 = "la bola 1 es negra" y N_2 = "la bola 2 es negra"

Es usual y muy útil guiarse con un esquema de árbol:



$$p(N_1 \cap N_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

Este diagrama de árbol resume el procedimiento: junto a cada rama se coloca la probabilidad de obtener el final, condicionada por el origen del que parte.
Cada trayecto nos muestra la intersección de cada una de las etapas, y su probabilidad es el producto de las probabilidades del camino.

Formulísticamente "ambas bolas son negras" = $N_1 \cap N_2$ y es

$$\mathrm{p}(N_1 \cap N_2) = \mathrm{p}(N_1) \cdot \mathrm{p}(N_2/N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

Se dice que las fases de un exp. compuesto son **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en el resultado de las siguientes..

En general:

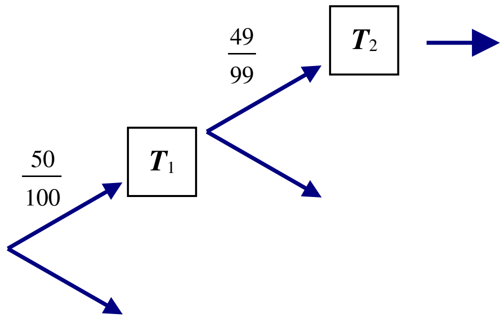
Hay experimentos aleatorios que pueden considerarse como la concatenación de varios exp. aleatorios "más simples". En ese caso se dice que cada uno de éstos es una **fase** o etapa, y que estamos ante un **experimento compuesto**.

Prueba compuesta: consiste en considerar la experiencia como la conjunción de varias fases, que son exp. aleatorios más simples.

☞ Ejemplo: el temario de unas oposiciones tiene un total de 100 temas. Un opositor se ha preparado 50 para el examen, consistente en contestar a dos temas extraídos al azar. Hallaremos la probabilidad de que haya estudiado ambos temas.

Supondremos que se trata de una prueba con dos fases: primero se elige el primer tema y a continuación el segundo.

Sean T_1 = "estudió el tema 1" y T_2 = "estudió el tema 2"



$$p(T_1 \cap T_2) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$$

Completa el árbol y halla las probabilidades siguientes:

- "No se sabe ninguno de los dos temas"
- "Se sabe uno de los temas"
- "Se sabe al menos uno de los temas"

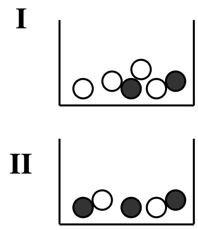
Observa que con formulísticamente sería

$$\mathrm{p}(T_1 \cap T_2) = \mathrm{p}(T_1) \cdot \mathrm{p}(T_2/T_1) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198} = 0.247\ldots$$

8. Teorema de la probabilidad total.

Mostraremos el contenido de este Teorema con el siguiente problema:

Problema: Tenemos las dos urnas del margen. Lanzamos un dado y si sale un número menor que tres sacamos una bola de la urna I, en caso contrario la sacamos de la urna II. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?



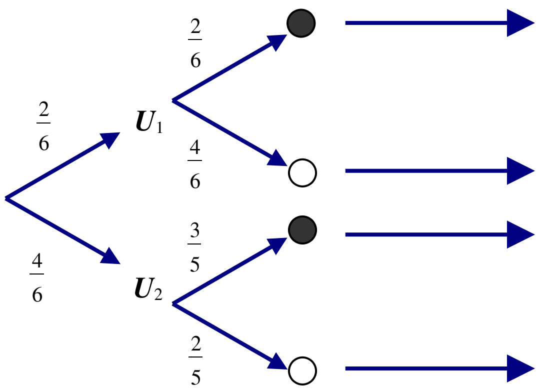
Consideremos los sucesos:

U_1 = "sale en el dado 1 o 2"

U_2 = "sale en el dado 3 o 4 o 5 o 6"

B = "la bola sacada es blanca"

El diagrama de árbol nos muestra la estructura de la prueba:



$$p(U_1 \cap N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$p(U_1 \cap B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

$$p(U_2 \cap N) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$p(U_2 \cap B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

El suceso B es ocurrirá suceda "U_1 y B" o cuando suceda "U_2 y B", luego:

$$\mathrm{p}(B) = \frac{2}{9} + \frac{4}{15} = \frac{22}{45} = 0.48\ldots$$

Halla la probabilidad de obtener bola negra:

- Con el mismo procedimiento
- A través del suceso contrario

Lo que hemos hecho se llama “Teorema de la Probabilidad Total”:

Si $S_1 \ldots, S_n$ son un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es el espacio muestral E, para todo suceso A se tiene:

$$\mathrm{p}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}(S_k) \cdot \mathrm{p}(A/S_k)$$

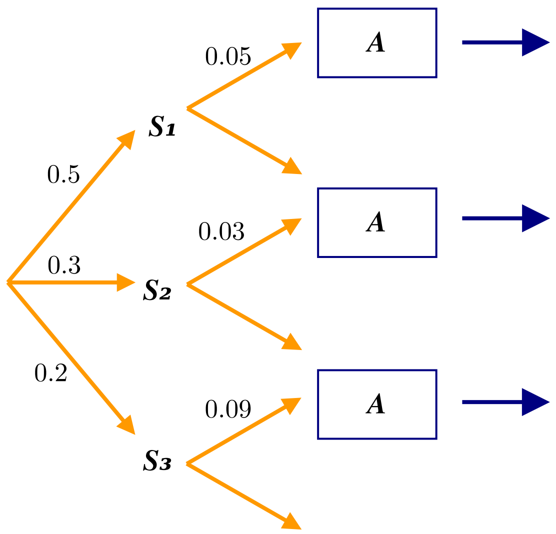
> Unos sucesos $S_1, \ldots, S_n$ que verifican esas propiedades se denomina un “sistema completo de sucesos”

9. Teorema de Bayes.

Vamos a estudiar esta clásica fórmula resolviendo el siguiente:

☞ Ejemplo: un conductor circula por una vía que sólo tiene tres salidas. La probabilidad de elegir la primera es 0.5 y la de elegir la segunda es de 0.3. La probabilidad de tener un accidente en primera es 0.05, la de tenerlo en la segunda es 0.03 y la de tenerlo en la última es 0.09.

Vamos a calcular la probabilidad de que sufra un accidente.



$$\mathrm{p}(S_1 \cap A) = 0.5 \cdot 0.05 = 0.0025$$

$$\mathrm{p}(S_2 \cap A) = 0.3 \cdot 0.03 = 0.009$$

$$\mathrm{p}(S_3 \cap A) = 0.2 \cdot 0.09 = 0.018$$

Para hallar la probabilidad de que sufra un accidente sumamos todas las probabilidades favorables a ese suceso (probabilidad total):

$$p(A) = 0.025 + 0.009 + 0.0018 = 0.052$$

Tratemos ahora de responder a la siguiente cuestión: si el conductor anterior ha tenido un accidente en una de las salidas, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la A?

Se trata de la siguiente probabilidad condicionada:

$$\mathrm{p}(S_1/A) = \frac{\mathrm{p}(S_1 \cap A)}{\mathrm{p}(A)} = \frac{0.025}{0.52} = \frac{25}{52} \approx 0.48$$

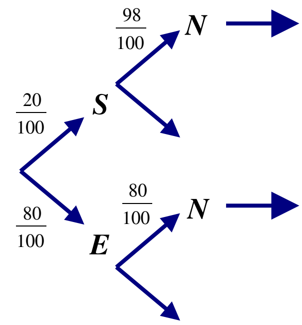
> Esta probabilidad es llamada “a posteriori” y nos señala, de las veces que ocurre un accidente, en qué proporción se producen en la salida A. Concretamente, un 48% de los accidentes en las salidas se producen en ella.

La clásica fórmula de Bayes permite calcular directamente las probabilidades "a posteriori":

> Si $S_1 \, \dots, S_n$ es un sistema completo de sucesos, para todo suceso A es:
>
> $$\mathrm{p}\left(S_i/A\right) = \frac{\mathrm{p}\left(S_i\right) \cdot \mathrm{p}\left(A/S_i\right)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}\left(S_k\right) \cdot \mathrm{p}\left(A/S_k\right)}$$
>
> A las probabilidades $p(S_i)$ se las llama "a priori".
>
> A las probabilidades $p(A/S_i)$ se las llama "verosimilitudes".
>
> A las probabilidades $p(S_i/A)$ se las llama "a posteriori".

¡Podemos calcularlas con los diagramas de árbol sin ella!

☞ Ejemplo: un fabricante lanza al mercado dos electrodomésticos. El primero, bajo de nombre de Supremo, que supone el 20 % de la producción total, y que se construye con elementos de calidad y pasan un exigente control, consiguiéndose que un 98% de ellos no falle en 5 años. El segundo producto, de nombre Excelencia es de calidad inferior y pasan controles de calidad menos exigentes, y tiene una fiabilidad del 80% en ese mismo período. Tomamos un equipo al azar y vemos que funcionó sin averías durante los 5 años. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un Excelencia?



Observemos que estamos ante una probabilidad a posteriori: nos piden la probabilidad de que sea "Excelencia" bajo el supuesto de que el equipo ha superado los cinco años de prueba.

Llamamos S = "elegimos un supremo"

E = "elegimos un excelencia"

N = "elegimos un producto que no falla en 5 años"

$$\mathrm{p}\left(E/N\right) = \frac{\mathrm{p}\left(E \cap N\right)}{\mathrm{p}\left(N\right)} = \frac{\mathrm{p}\left(E\right) \cdot \mathrm{p}\left(N/E\right)}{\mathrm{p}\left(E\right) \cdot \mathrm{p}\left(N/E\right) + \mathrm{p}\left(S\right) \cdot \mathrm{p}\left(N/S\right)}$$

Calculando, obtenemos una probabilidad del 77%, aproximadamente, de que sea un Excelencia.

Ejercicios

1. [S/00] En un conjunto de estudiantes, el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.

a) ¿Son independientes los sucesos "estudiar alemán" y "estudiar francés"?

b) Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie ni francés ni alemán.

2. [S/00] De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar. Calcula la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:

a) Se eligen sin reemplazo.

b) Se eligen con reemplazo.

3. [S/00] En un Instituto se ofertan tres modalidades excluyentes A , B y C y dos idiomas excluyentes: Inglés y Francés. La modalidad A es elegida por un 50% de alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%.

También se conoce que han elegido Inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido Francés el resto de los alumnos.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes del Instituto ha elegido Francés?

b) Si se elige al azar un estudiante de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

4. [S/00] La población española está compuesta por un 55% de mujeres, de las que un 8% ha realizado en alguna ocasión una compra por Internet. Se sabe que la probabilidad de que una persona haya comprado alguna vez usando Internet es 0'3.

Halle la probabilidad de que un hombre, elegido al azar, haya comprado alguna vez por Internet.

5. [S/00] Dos sucesos A y B son tales que

$$p(A)=0{,}30 \;,\; p(B/A)=0{,}10 \;\text{ y }\; p(\overline{A\cup B})=0{,}63$$

a) ¿Es A independiente de B? ¿Es B independiente de A?

b) Calcule $p(\overline{A}\cup\overline{B})$

6. [S/00] Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A , B ó C, con las siguientes probabilidades:

$$p(A)=0{,}25 \;,\; p(B)=0{,}6 \;\text{ y }\; p(C)=0{,}15$$

La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0'4, si huye por la calle B es 0'5, y si huye por la C es 0'6.

a) Halle la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.

b) Si el ladrón ha sido alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido alcanzado en la calle A?

7. [S/00] En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

a) Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.

b) Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras, acierte las respuestas de las 10 últimas, si éstas las contesta al azar.

8. [S/00] De entre los alumnos que cursan 2º curso del Bachillerato de Ciencias de la Salud, el 80% elige Estadística como optativa y el resto Matemáticas. No hay alumnos que cursen las dos materias a la vez. El 40% de los alumnos que eligen Estadística supera el curso, mientras de los que eligen Matemáticas el 55% supera el curso.

a) Elegido un alumno al azar, calcule la probabilidad de que supere el curso.

b) Si un alumno ha superado el curso, calcule la probabilidad de que haya elegido Estadística.

9. [S/00] El 80% de los alumnos de un IES son aficionados al fútbol y el 60% al cine; la mitad de los alumnos de ese IES lo son a las dos cosas. Se elige un alumno al azar:

a) Halle la probabilidad de que no sea aficionado a ninguna de las dos cosas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al cine sabiendo que no es aficionado al fútbol?

10. [S/00] En una clase el 60% de los alumnos aprobó Historia y la mitad de la clase aprobó Inglés. Se sabe que el 70% de los alumnos que aprobaron Historia aprobó Inglés.

a) Halle la probabilidad de que un alumno cualquiera de la citada clase apruebe al menos una de las dos asignaturas.

b) Calcule el porcentaje de los alumnos que, habiendo aprobado Inglés, aprueban Historia.

c) ¿Son independientes los sucesos "aprobar Historia" y "aprobar Inglés"? Razone la respuesta.

11.[S/00] La tabla adjunta muestra los resultados de una encuesta realizada entre varias personas con estudios primarios (*P*), medios (*M*) y superiores (*S*), sobre la pregunta de si fuman (*F*) o no fuman (F^c):

	P	***M***	***S***
F	190	120	12
F^c	60	280	138

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada con estudios primarios fume? ¿Y si tiene estudios superiores?

b) ¿Son independientes los sucesos "tener estudios superiores" y "no fumar"?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada que fume no tenga estudios superiores?

12. [S/00] Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que

$$p(A)=0'7 \,, p(B)=0'6 \text{ y } p(A\cup B)=0'9$$

a) Justifique si A y B son independientes.

b) Calcule $p(A/\overline{B})$ y $p(B/\overline{A})$

13.[S/01] Una caja contiene diez tornillos, de los que dos son defectuosos.

a) Si vamos extrayendo tornillos, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?

b) Si extraemos sólo dos tornillos, y el segundo ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también lo haya sido?

14.[S/01] Tenemos dos urnas A y B, que contienen las siguientes bolas: *A* (5 blancas, 3 negras y 2 rojas) y *B* (4 blancas y 6 negras).

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra *B*. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca: ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna *B*?

15.[S/01] Disponemos de tres dados, uno de los cuales está trucado. La probabilidad de sacar un cinco en el trucado es 0´25, siendo los otros resultados equiprobables. Se elige un dado al azar y se realiza un lanzamiento con él.

a) Determine la probabilidad de obtener un dos.

b) Dado que ha salido un dos, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el dado trucado?

16.[S/01] En una ciudad el 60 % de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30 % son aficionados al baloncesto y el 25 % a ambos deportes.

a) ¿Son independientes los sucesos "ser aficionado al fútbol" y "ser aficionado al baloncesto"?.

b) Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?

c) Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

17.[S/01] Dos cajas, *A* y *B*, tienen el este contenido:

A : 5 monedas de 1 euro y 3 de 10 pesetas.

B : 4 monedas de 1 euro, 4 de 10 pts. y 2 de 25 pts.

De una de las cajas elegida al azar, se extrae una moneda.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 1 euro?

b) Si la moneda extraída resulta ser de 10 pesetas, halla la probabilidad de que proceda de la caja *B*.

18.[S/01] En un cineclub hay 80 películas; 60 son de "acción" y 20 de "terror". Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

19.[S/01] Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(A)=\frac{1}{2}\ ,p(B)=\frac{1}{3}\ \text{ y }\ p(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

Calcule:

a) $p(A/B)$ y $p(B/A)$.

b) $p(A\cup B)$.

c) $p(A^c\cap B)$.

20.[S/01] Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.

a) Calcule la probabilidad de que sea de oro.

b) Sabiendo que ha sido de plata, halle la probabilidad de que haya sido sacada del cofre A.

21.[S/01] La probabilidad de que un jugador A marque un gol de penalti es de 5/6, mientras que la de otro jugador B es 4/5. Si cada uno lanza un penalti,

a) Halle la probabilidad de que marque gol uno solo de los dos jugadores.

b) Halle la probabilidad de que al menos uno marque gol.

22.[S/01] Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son

$$p(A)=\frac{2}{3}\ \text{ y }\ p(B)=\frac{1}{2}$$

a) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles?

b) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule $p(A\cup B)$.

c) Suponiendo que $A\cup B=E$ calcule $\mathrm{p}\,(A\cap B)$.

23.[S/01] Al lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: "sacar al menos una cara y una cruz"

B: "sacar a lo sumo una cara"

a) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

b) ¿Son independientes ambos sucesos?

24.[S/11] En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:

a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.

b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.

25.[S/11] En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0,1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0,95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0,03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma?

b) Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.

26.[S/11] Un examen consta de una parte teórica y una parte práctica. La probabilidad de que se apruebe la parte teórica es 0.7 y la de que se apruebe la parte práctica 0.75. Se sabe que el 50% de los alumnos ha aprobado ambas.

a) Calcule la probabilidad de aprobar alguna de las dos partes.

b) Calcule la probabilidad de aprobar la parte práctica sabiendo que no se ha aprobado la parte teórica.

c) ¿Son independientes los sucesos "aprobar parte teórica" y "aprobar parte práctica"?

27. [S/11] Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$\mathrm{p}\,(A)=0.4\ ,\ \mathrm{p}\,(B)=0.5\ ,\ \mathrm{p}\,(A\cap B)=0.2$$

a) Calcule las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{p}\,(A\cup B)\ ,\ \mathrm{p}\,(A/B)\ ,\ \mathrm{p}\left(B/\overline{A}\right)$$

b) Razone si A y B son sucesos incompatibles.

c) Razone si A y B son independientes.

28.[S/11] Pedro vive en una ciudad donde el 40% de los días del año hay riesgo de lluvia y el resto no lo hay. Cuando hay riesgo de lluvia, Pedro coge el paraguas un 98% de las veces y cuando no lo hay, un 5% de las veces. Si se selecciona un día del año al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que Pedro no haya cogido el paraguas ese día?

b) ¿cuál es la probabilidad de que exista riesgo de lluvia, si sabemos que ese día Pedro ha cogido el paraguas?

29.[S/11] Sean dos sucesos, *A* y *B*, tales que

$$p(A)=0{,}5 \ , \ p(B)=0{,}4 \text{ y } p(A/B)=0{,}5$$

a) Halle la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

b) Calcule la probabilidad de que no se verifique *B* si se ha verificado *A*.

c) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? Razone la respuesta.

30.[S/11] Una compañía aseguradora realiza operaciones de seguros médicos y de seguros de vida. El 20% de las operaciones corresponde a seguros médicos y el resto a seguros de vida. El porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos es del 10% en los seguros médicos y del 15% en seguros de vida.

a) Halle el porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos.

b) De las operaciones que han sufrido retrasos en los pagos, ¿qué porcentaje corresponde a los seguros de vida?

31.[S/11] Un libro tiene cuatro capítulos. El primer capítulo tiene 140 páginas, el segundo 100, el tercero 150 y el cuarto 50. El 5% de las páginas del primer capítulo, el 4% del segundo y el 2% del tercero tienen algún error. Las páginas del cuarto capítulo no tienen errores.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?

b) Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

32.[S/11] Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.

a) Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Determine la probabilidad del suceso *A*: "El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda".

c) Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

33.[S/11] Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) Calcule la probabilidad de que gane Ana.

b) Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

c) Calcule la probabilidad de que haya empate.

34.[S/11] En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos. Se escoge una persona al azar:

a) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?

b) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

35.[S/11] El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión y de los que sí lo están, solamente un 5% fueron reparados anteriormente. Se elige un aparato al azar en el servicio técnico:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido reparado en otra ocasión?

b) Si es la primera vez que ha llegado al servicio técnico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en garantía?

36. [S/20] Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
b) Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

37. [S/20] Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5 % de las LED y un 2 % de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.
b) Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa

38. [S/20] Se han mezclado 90 llaves electrónicas de apertura de un determinado garaje, con apariencia idéntica, de las cuales 60 funcionan correctamente y 30 no funcionan. Se eligen al azar 2 de las 90 llaves.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos llaves elegidas abran la puerta del garaje?
b) ¿Cuál es la probabilidad de poder abrir el garaje con alguna de ellas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una de las llaves elegidas funcione correctamente y la otra no?

39. [S/20] Una empresa almacena el mismo número de latas de refresco de cola, naranja y limón. De las 30000 latas de refresco almacenadas, se sabe que 1800 latas de cola, 2400 de naranja y 3000 de limón caducan en 2021.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2021?
b) Si se ha elegido al azar una lata que no caduca en 2021, ¿cuál es la probabilidad de que sea de cola?

40. [S/20] A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) Halle la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

41. [S/20] Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E1 y el resto por una empresa E2. De las bicicletas de la empresa E1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
b) Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E1 y de mala calidad.
Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E2?

42. [S/20] Tres personas se encargan de los cobros de la caja de un supermercado. El mes pasado, la primera de ellas realizó el 30% de los cobros, la segunda el 45% y la tercera el resto. La dirección del supermercado ha comprobado que de los cobros realizados por la primera persona, el 1% son erróneos, que la segunda cometió errores en el 3 % de los cobros y la tercera en el 2%.

a) Calcule la probabilidad de que un cobro elegido al azar haya sido erróneo.
b) Se elige al azar un cobro correcto. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido realizado por la segunda persona?

43. [S/20] En un centro de enseñanza secundaria, el 11% de los profesores ocupan cargos directivos y el 13% pertenecen a alguna comisión. Además, el 6% ocupan un cargo directivo y pertenecen a alguna comisión.

a) ¿Cuál es el porcentaje de profesores que pertenecen a alguna comisión y no ocupan ningún cargo directivo?
b) Calcule el porcentaje de profesores que no ocupan cargos directivos ni pertenecen a ninguna comisión.
c) De los profesores que ocupan un cargo directivo, ¿qué porcentaje pertenece a alguna comisión?

44.[S/20] Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio.

a) Si $\mathrm{p}(A) = 0$ y $\mathrm{p}(B) = 0$, ¿pueden ser los sucesos A y B independientes e incompatibles a la vez? Justifique la respuesta.

b) Sabiendo que $\mathrm{p}(A) = 0.3$, $\mathrm{p}(B) = 0.5$ y $\mathrm{p}(A/B) = 0.2$, calcule las probabilidades de estos sucesos:

$$A \cap B\ ,\ A \cup B\ ,\ A^c \cup B^c\ ,\ A - B$$

45.[S/20] El censo de una población andaluza está compuesto en total por 15000 personas, de las cuales 8500 son mujeres. Se sabe que el 15% de las mujeres y el 20% de los hombres censados en dicha población han viajado alguna vez a un país extranjero. Se elige al azar una persona censada en dicha población.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya viajado al extranjero?

b) Si se sabe que esta persona no ha viajado al extranjero, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

46.[S/20] Se sabe que el 65% de los estudiantes de bachillerato de Andalucía ha participado en programas Erasmus+ y que de ellos, el 80% ha mejorado su calificación en lengua extranjera. De los estudiantes que no han participado en programas Erasmus+, mejoran su calificación en lengua extranjera el 30%. Se elige al azar un estudiante de bachillerato de Andalucía.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya mejorado su calificación en lengua extranjera?

b) Si se sabe que ha mejorado su calificación en lengua extranjera, ¿cuál es la probabilidad de que haya participado en un programa Erasmus+?

47.[S/20] El 47% de los jóvenes andaluces tienen una vida sedentaria. De ellos, el 72% presentan obesidad, mientras que solamente la presentan el 22% de los jóvenes no sedentarios. Se elige al azar un joven andaluz.

a) Calcule la probabilidad de que sea sedentario y no presente obesidad.

b) Calcule la probabilidad de que presente obesidad.

c) Calcule la probabilidad de que sea sedentario, sabiendo que presenta obesidad.

Cuestiones

1. Comprueba con un ejemplo que dos sucesos pueden ser incompatibles sin ser contrarios.

2. Consideremos los sucesos A y B en una experiencia aleatoria. Expresa los sucesos siguientes:

a) Se realizan ambos.

b) Se realiza A pero no B.

c) No se realiza ninguno de ellos.

d) Ocurre uno al menos de los dos.

3. La diferencia de dos sucesos, A y B , es el suceso que se realiza cuando ocurre A y no B. Represéntalo con unos diagramas de Venn y comprueba con un ejemplo que es:

$$A-B=A\cap B^c$$

4. ¿Cuál es el suceso contrario del suceso seguro?

5. Si unimos un suceso y su contrario, ¿qué obtenemos? ¿Y si los intersectamos? Compruébalo con un ejemplo.

6. Comprueba que al sacar una carta de una baraja, los sucesos "sacar un as" y "sacar un oros" son independientes.

7. Sea $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ el espacio muestral de un experimento y p una medida de probabilidad definida de modo que es:

$$p(\{a\})=p(\{b\})=p(\{c\})=p(\{d\})=\frac{1}{8}\ ,\ p(\{e\})=\frac{1}{4}$$

Se consideran los sucesos:

$$A=\{a,c,d,e\}\ \text{ y }\ B=\{d,e,f\}$$

Calcula:

$$p(A)\ ,\ p(B)\ ,\ p(A\cup B)\ \text{ y }\ p(A\cap B)$$

8. Sean A y B dos sucesos de los que se conocen

$$p=p(A)\ \ q=p(B)\ \text{ y }\ r=p(A\cap B)$$

Expresa en función de p , q , r las probabilidades de los sucesos:

C = "no ocurre ninguno de los sucesos A y B"

D = "sucede exactamente uno de los sucesos A o B"

9. Sean A y B dos sucesos tales que las probabilidades

$$p(A)=a \text{ , } p(B)=b \text{ y } p(A\cap B)=c$$

son conocidas. Obtén en función de a , b , c:

a) $p(A\cup B)$

b) $p(\overline{A}\cap\overline{B})$

c) $p(\overline{A}\cap B)$

10. Sean A y B dos sucesos de un exp. aleatorio del que se conocen sus probabilidades

$$p(A)=0'6 \text{ y } p(B)=0'7$$

y que es

$$p(A\cup B)-p(A\cap B)=0'3$$

Calcula

$$p(A\cup B) \text{ y } p(A\cap B)$$

11. Sean A y B dos sucesos de un exp. aleatorio del que se conocen

$$p(A)=0'4 \quad p(B)=0'3 \text{ y } p(A\cap B)=0'1$$

Calcula razonadamente:

a) $p(A\cup B)$ b) $p(A/B)$

c) $p(A^c\cup B^c)$ d) $p(A^c\cap B)$

12. Comenta la siguiente afirmación: "Si A y B son dos sucesos asociados a un determinado exp. aleatorio, $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$ "

13. Escribe la fórmula que da la probabilidad de la unión de dos sucesos independientes en términos de probabilidad de cada uno de ellos.

14. Sean A y B dos sucesos posibles que se pueden presentar en un exp. aleatorio. Demostrar que si A y B son independientes también lo son sus sucesos contrarios.

15. Probar que si los sucesos A y B son independientes también lo son los sucesos

a) A y B^c b) A^c y B

16. Estudia la posible independencia de dos sucesos A y B en los casos siguientes, señalando cuándo serán independientes:

a) A y B son mutuamente excluyentes y de probabilidad no nula.

b) A está incluido en B, y A es un suceso de probabilidad no nula.

c) A es cualquier suceso y $p(B)=0$.

17. Sea A un suceso con $0<p(A)<1$.

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario?

b) Sea B otro suceso tal que $A\supset B$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y C^c independientes?

Autoevaluación

1. En una comisaría de policía trabajan los inspectores Ana, Mercedes, Juan, Luis y Pedro. Dos de ellos deben encargarse de investigar la muerte de un narcotraficante. Si la pareja se elige al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene una pareja determinada de ser elegida?
b) Halla la probabilidad que tiene Ana de ser elegida.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos inspectoras se encargue del asunto?

2. En un I.E.S. hay matriculados en 4º de E.S.O. 18 chicos y 20 chicas, de los que la tercera parte de ellos y la mitad de ellas están en el grupo A. Se elige un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico del grupo A?

b) Halla la probabilidad de que sea chico o esté en el grupo A.

c) Si el alumno elegido no está en el grupo A, ¿qué probabilidad hay de que sea chica?

3. En el país de Estados Amigos la pena de muerte está en vigor. A todos los condenados a la pena capital se les da la oportunidad de conmutarla por cadena perpetua de la siguiente forma: el reo ha de extraer una bola blanca de una de las dos urnas que se le dan para elegir: en una hay 2 bolas blancas y 1 negra, en la otra 2 blancas y 1 negra.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un condenado a muerte logre conmutar la pena?

b) Si un reo ha salvado la vida, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la primera urna?

4. En un espacio de probabilidad dos sucesos tienen probabilidades 0,7 y 0,6, respectivamente, y la probabilidad de que no suceda alguno de ellos es 0,58. ¿Son sucesos dependientes o independientes?

Autoevaluación

1. Por comodidad, nombremos:

Ana = A , Mercedes = M , Juan = J , Luis = L y Pedro = P

a) Pueden formarse 10 parejas, así la probabilidad de cada pareja de ser elegida es $p = \frac{1}{10}$.

b) En este caso no hay ningún problema para escribir el espacio muestral:

$$E=\{AJ, AL, AM, AP, MJ, ML, MP, JL, JP, LP\}$$

Como vemos son 10 parejas las posibles, llegando a la conclusión anterior.

c) Vemos en E que hay cuatro casos favorables al suceso (Ana puede formar pareja con sus cuatro compañeros). Por la Regla de Laplace:

$$p('Ana\,es\,elegida')=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

d) Basta contar las parejas en las que ninguna de ellas está y aplicar la Regla de Laplace:

$$p('Ninguna\,es\,elegida')=\frac{3}{10}$$

2. Completamos la siguiente tabla, en la que resumimos la distribución por sexo y por grupos:

	Chico	**Chica**	
A	6	10	16
No A	12	10	22
	18	20	38

Ahora basta mirar en la tabla para hallar:

a) $p(Chico\cap A)=\frac{6}{38}$

b) Es la probabilidad de una unión:

$$\begin{aligned} p(Chico\cup A) &= p(Chico)+p(A)-p(Chico\cap A) \\ &= \frac{18}{38}+\frac{16}{38}-\frac{6}{38}=\frac{28}{38} \end{aligned}$$

c) *Método 1*: directo, consultando en la tabla:

$$\begin{aligned} p(Chica/'No\,A') &= \frac{chicas\,de\,'no\,A'}{total\,de\,alumnos\,de\,'no\,A'} \\ &= \frac{10}{22} \end{aligned}$$

Método 2: fórmula de probabilidad condicionada:

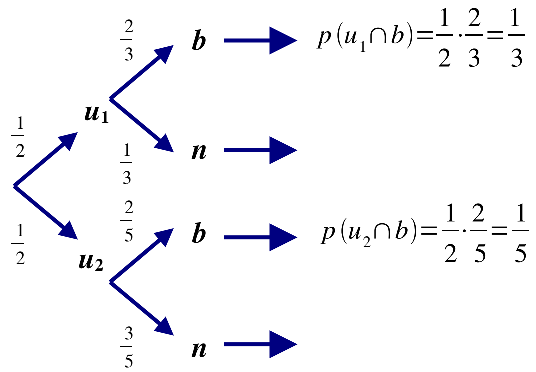
$$\begin{aligned} p(Chica/'No\,A') &= p\frac{(Chica\cap 'No\,A')}{p('No\,A')} \\ &= \frac{10/38}{22/38}=\frac{10}{22} \end{aligned}$$

3. Esquemáticamente, llamemos:

u_1 = "elige la urna 1" u_2 = "elige la urna 2"

b = "sale bola blanca" n = "sale bola negra"

El diagrama de árbol de la prueba es:



a) La probabilidad de que salve la vida es la de que salga bola blanca:

$$p(b)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}\approx 0'53$$

También: por el teorema de probabilidad total:

$$\begin{aligned} p(b) &= p(b/u_1)\cdot p(u_1)+p(b/u_2)\cdot p(u_2) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8}{15} \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori:

$$p(u_1/b)=\frac{p(b\cap u_1)}{p(b)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{5}{8}$$

También: por la fórmula de Bayes

$$\begin{aligned} p(u_1/b) &= \frac{p(b/u_1)\cdot p(u_1)}{p(b/u_1)\cdot p(u_1)+p(b/u_2)\cdot p(u_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5}{8} \end{aligned}$$

4. Sean A y B los sucesos, de manera que:

$$p(A)=0{,}7 \quad \text{y} \quad p(B)=0{,}6$$

Hemos de averiguar si es o no:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B) \qquad (*)$$

Observemos que el suceso "no ocurre alguno de ellos" ($\bar{A}\cup\bar{B}$) es el contrario de "ocurren los dos sucesos" ($A\cap B$). Así, por la probabilidad del suceso contrario:

$$p(A\cap B)=1-0{,}58=0{,}42$$

Por otro lado, es:

$$p(A)\cdot p(B)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42$$

Como ambos coinciden, los sucesos cumplen la igualdad (*), y por ello son sucesos independientes.