TEMA 6

INTEGRALES

Contenidos

1. Concepto de primitiva e Integral indefinida. La notación de Leibnitz.
2. Integrales inmediatas.
3. Integral de una combinación lineal.
4. Integrales de formas compuestas.
5. Integral definida: Regla de Barrow.
6. Aditividad en el intervalo.
7. Interpretación geométrica.
8. Cálculo del área entre una curva y el eje de abscisas.
9. Área de recintos limitados por curvas.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Comprender el concepto de primitiva de una función, y conocer la notación de Leibnitz .
2. Dada una familia de primitivas, saber determinar una cuya gráfica pase por un punto dado.
3. Saber aplicar correctamente la linealidad de la integración
4. Saber obtener primitivas de funciones elementales aplicando inversamente la regla de la cadena.
5. Saber aplicar la Regla de Barrow.
6. Saber aplicar las propiedades de linealidad y aditividad respecto al intervalo de integración.
7. Conocer la noción de función integral relacionándolo con el área bajo una curva.
8. Saber calcular áreas de recintos planos limitados por curvas.

1. Primitiva e integral indefinida

Vamos a estudiar en este tema el proceso contrario al cálculo de la derivada, que se llama integración:

> Consideremos una función continua f definida en un intervalo I.
>
> a) Una primitiva de f es una función F que cumpla $F' = f$ en I.
>
> b) Al proceso por el que se obtiene F a partir de f se le llama integración.

☞ Ejemplo: como la derivada de $y = x^3$ es $y' = 3x^2$, tenemos que una primitiva de la función $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$.

☞ Ejemplo: la función $F(x) = \ln x$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, porque es $F'(x) = f(x)$.

Tenemos, así dos operaciones recíprocas:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "derivo"] & f \arrow[l, bend left, "integro"] \end{tikzcd}$$

El proceso por el que se pasa de:

$F(x) = x^2$ a $f(x) = 2x$ se llama derivación.

$f(x) = 2x$ a $F(x) = x^2$ se llama integración.

Observemos que una función continua tiene infinitas primitivas. Por ejemplo:

$$f(x) = 3x^2 \xrightarrow{integrando} \begin{cases} F_1(x) = x^3 + 1 \\ F_2(x) = x^3 + 3 \\ F_3(x) = x^3 - \dfrac{2}{3} \\ \quad \ldots \end{cases}$$

Todas las primitivas se diferencian sólo en una constante. Luego una primitiva cualquiera de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3 + C$ donde C es un número fijo cualquiera.

En general:

> Sea F una primitiva de la función continua f en el intervalo I.
>
> a) Cualquier primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.
>
> b) Esto se expresa simbólicamente con la notación de Leibniz:
>
> $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$
>
> y se dice que la integral indefinida de $f(x)$ es $F(x) + C$.

El símbolo ' dx ' que acompaña a la función se denomina ' diferencial de x ', pero nosotros no lo leeremos.

Es bueno colocarlo en la integral para acostumbrarnos a él, pues así lo encontraremos en todas partes.

Es muy útil en Física y para obtener integrales difíciles.

☞ Ejemplo: Para $x > 0$ es

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$$

☞ Ejemplo: calculemos la integral indefinida de la función $f(x) = x^2$.

Es fácil comprobar que una primitiva es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Así:

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Observa que decir

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

es lo mismo que decir

$$D\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$$

2. Integrales inmediatas.

De las reglas de derivación que ya conocemos se deducen inmediatamente las siguientes primitivas. De ahí el nombre de "integrales inmediatas":

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

Podemos comprobar todas estas integrales observando que al derivar el segundo miembro obtenemos el integrando.

3. Integración de una combinación lineal

De las reglas de derivación se deduce cómo integrar una combinación lineal:

$$\boxed{\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

La linealidad equivale a estas dos:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$\int k \cdot f = k \cdot \int f$$

☞ Ejemplo:

$$\int \left(x^2 + 4\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + 4\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 4\mathrm{e}^x + C$$

☞ Ejemplo:

$$\int (3\mathrm{e}^x - 5\cos x)\,\mathrm{d}x = 3\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - 5\int \cos x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^x - 5\operatorname{sen} x + C$$

☞ Ejemplo: para $x > 0$ es

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(2x + 3 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x^2 + 3x + \ln x + C$$

4. Integrales de formas compuestas.

De la regla de la cadena para derivar funciones compuestas podemos obtener un procedimiento para obtener primitivas de más funciones. Por ejemplo:

$$\mathscr{D}e^{x^2+1} = e^{x^2+1} \cdot 2x \rightarrow \int 2x\, e^{x^2+1} dx = e^{x^2+1} + C$$

$$\mathscr{D} \ln\left(x^3+1\right) = \frac{3x^2}{x^3+1} \rightarrow \int \frac{3x^2}{x^3+1}\, dx = \ln\left(x^3+1\right) + C$$

Observa que la primitiva se deduce de la derivada de una composición.

Aquí tenemos una tabla de las formas compuestas inmediatas.

$$\int u'(x)\, u(x)^n\, dx = \frac{1}{n+1} u(x)^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln|u(x)| + C$$

$$\int u'(x)\, e^{u(x)}\, dx = e^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\, \cos u(x)\, dx = \operatorname{sen} u(x) + C$$

$$\int u'(x)\, \operatorname{sen} u(x)\, dx = -\cos u(x) + C$$

Se deducen inmediatamente de la regla de la cadena.

Para comprobar las integrales, derivamos el segundo miembro y obtendremos los integrandos

☞ Ejemplo: veamos algunas formas exponenciales

$$\int x\, e^{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$$

$$\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int 5\, e^{5x}\, dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

¿Eres capaz de encontrar la función argumento ' u ' de la fórmula?

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo seno y coseno

$$\int x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(x^3\right) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(4x)\, dx = \frac{1}{4}\int 4 \operatorname{sen}(4x)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(4x) + C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo logarítmico

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

☞ Ejemplo: vemos algunas formas de tipo potencial

$$\int x\left(x^2-1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2-1\right)^3 dx = \frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4 + C$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

5. Integral definida: Regla de Barrow

Nosotros vamos a tomar como punto de partida la siguiente definición:

Sea f una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y F es una primitiva suya. La integral definida de f en el intervalo $[a\,,b]$ es el número dado por

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Esta fórmula recibe el nombre de Regla de Barrow, en honor a Isaac Barrow, maestro de Newton.

Notas:

a) La integral definida es un **número**, que no depende de la primitiva F (la constante C se elimina al restar).

b) Suele escribirse de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

c) Obsérvese que

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ Ejemplo: aplicamos la Regla de Barrow para obtener

$$\int_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - (0) = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -1$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

6. Aditividad en el intervalo

Es una propiedad muy importante que se necesita a veces.

Si es f continua en el intervalo $[a\,,b]$ y c es un punto de este intervalo:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

☞ Ejemplo: observemos que la integral en el intervalo $[-2\,,3]$ de

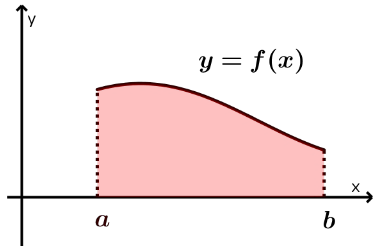
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

viene dada por

$$\int_{-2}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^3 x^2\mathrm{d}x = -4 + 9 = 5$$

7. Interpretación geométrica

La integral definida está relacionada con el área de recintos curvilíneos:

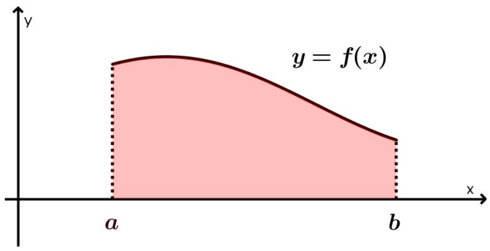


> Sea $f \geq 0$ una función continua en el intervalo $[a\,,b]$.
>
> El área del recinto $\mathscr{R}$ que delimita su gráfica $y = f(x)$ con el eje de abscisas en dicho intervalo $[a\,,b]$ es:
>
> $$\int_a^b f = a\,(\mathscr{R})$$

☞ ATENCIÓN: la integral definida coincide con el área sólo cuando la función está por encima del eje X. Cuando la función es negativa, la integral también es negativa, dándonos el área cambiada de signo. Y cuando está por encima y por debajo la integral es igual a la resta entre las áreas de las regiones superiores y las áreas de las regiones inferiores.

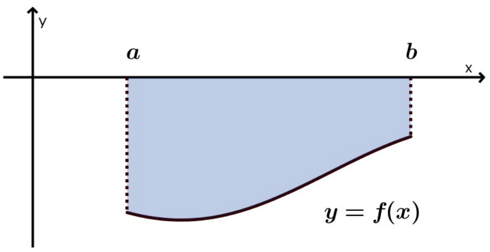
Aquí podemos ver tres casos:

- Caso 1: $f \geq 0$ en $[a\,,b]$



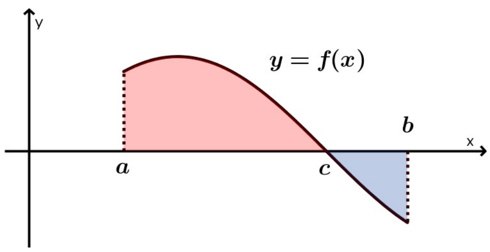
$$\int_a^b f = a\,(\mathscr{R})$$

- Caso 2: $f \leq 0$ en $[a\,,b]$



$$\int_a^b f = -a\,(\mathscr{R})$$

- Caso 3: f cambia de signo en $[a\,,b]$



$$\int_a^b f = a\,(\mathscr{R}_1) - a\,(\mathscr{R}_2)$$

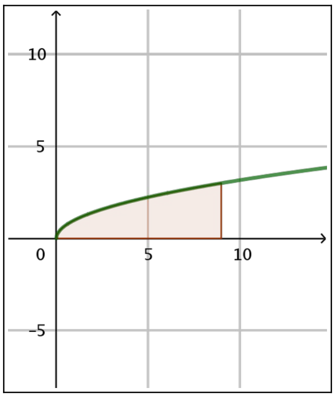
A continuación veremos un procedimiento para obtener el área encerrada en todos los casos.

8. Cálculo de área entre una curva y el eje X

En la práctica, obtener el área delimitada por la gráfica $y = f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = a$ y $x = b$:

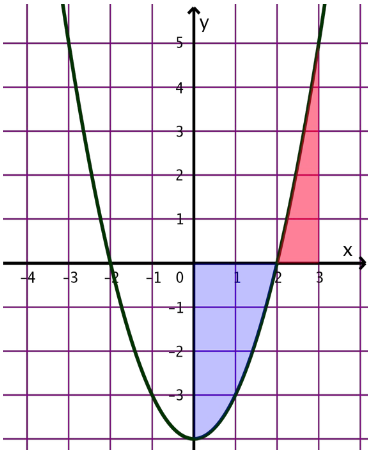
1. Resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que los ceros en $[a, b]$ son $x = x_1 \ldots x_n$.
2. Calculamos las integrales
$$\int_a^{x_1} f\ ,\ \int_{x_1}^{x_2} f\ \ldots\ \int_{x_n}^{b} f$$
3. El área es la suma de los valores absolutos de esas integrales.

☞ Ejemplo 1: ¿cuál es el área del recinto $\mathscr{R}$ limitado por la parábola $y = \sqrt{x}$ y el eje **X** en el intervalo $[0, 9]$?



Como $\sqrt{x} = 0 \to x = 0$, sólo calculamos:
$$\int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{x=0}^{x=9} = 18 - 0 = 18$$
Resulta, pues:
$$a(\mathscr{R}) = 18\ \mathrm{u}^2$$

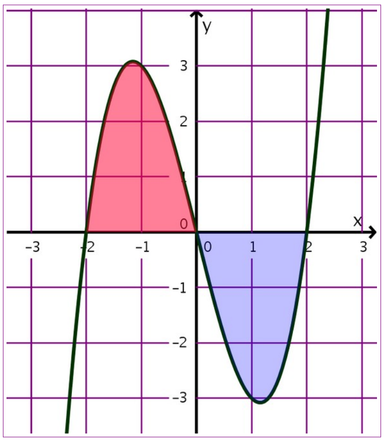
☞ Ejemplo 2: obtengamos el área del recinto $\mathscr{R}$ limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$ y el eje X comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.



Resolviendo:
$$f(x) = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$$
Deducimos que hay que calcular separadamente las siguientes integrales:
$$\int_0^2 (x^2 - 4)\,\mathrm{d}x = -\frac{16}{3} \quad \text{y} \quad \int_2^3 (x^2 - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$$
Resulta, pues:
$$a(\mathscr{R}) = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}\mathrm{u}^2$$

En algunas ocasiones, no se indica el intervalo de integración. Se entiende que la curva y el eje de abscisas encierran un número finito de recintos acotados y que debemos hallar el área de la unión de todos ellos.

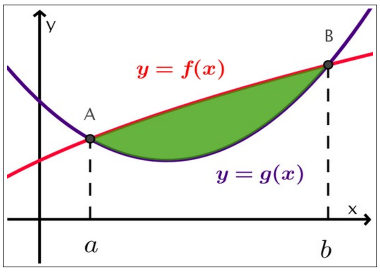
☞ Ejemplo 3: obtengamos el área del recinto $\mathscr{R}$ que encierra la curva $y = x^3 - 4x$ con el eje X.



Resolviendo:
$$f(x) = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$$
Deducimos que hay que calcular separadamente las siguientes integrales:
$$\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x = 4 \text{ y } \int_0^2 (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x = -4$$
Resulta, pues, que el área pedida es:
$$a(\mathscr{R}) = a(\mathscr{R}_1) + a(\mathscr{R}_2) = 4 + 4 = 8\ \mathrm{u}^2$$

9. Área de recintos limitados por curvas

Si tenemos dos funciones continuas $f\,, g : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ con $f \geq g$ es claro que el área del recinto comprendido entre sus gráficas en el intervalo es igual a la integral de f (la función superior) menos la integral de g (función inferior):



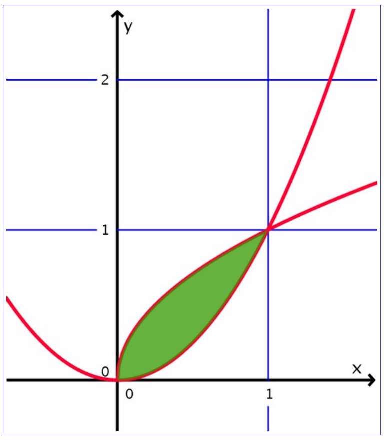
$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$$

En la práctica, para obtener el área encerrada entre las gráficas $y = f(x)$ e $y = g\,(x)$:

1. Resolvemos la ecuación $f\,(x) = g\,(x)$. Supongamos que las soluciones, ordenadas de menor a mayor son $x = a\,, x = b$ y $x = c$.
2. Calculamos las integrales
$$\int_a^b (f - g) \quad , \quad \int_b^c (f - g)$$
3. El área es la suma de los valores absolutos de esas integrales.

☞ Ejemplo 1: obtengamos el área del recinto delimitado entre las parábolas

$$y = x^2 \quad , \quad y = \sqrt{x}$$



Resolviendo

$$x^2 = \sqrt{x} \to x^4 = x \to x^4 - x = 0 \to x = 0\,, x = 1$$

deducimos que sólo necesitamos calcular una integral:

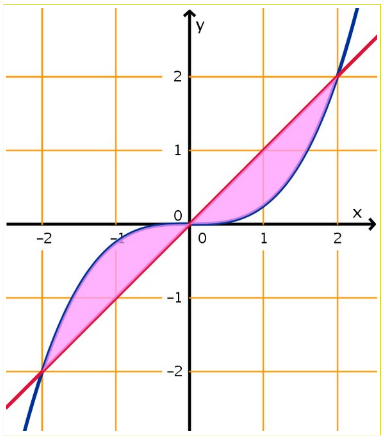
$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3}$$

Como nos ha salido positiva, hemos restado correctamente la función inferior a la superior:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{1}{3}\ \mathrm{u}^2$$

☞ Ejemplo 2: obtengamos el área encerrada entre las curvas de ecuaciones

$$y = \frac{x^3}{4} \quad , \quad y = x$$



Veamos dónde se interceptan las curvas:

$$\frac{x^3}{4} = x \to x^3 = 4x \to x(x^2 - 4) = 0 \to x = -2\,, 0\,, 2$$

Hay que calcular dos integrales:

$$\int_{-2}^0 \left(x - \frac{x^3}{4}\right)\,\mathrm{d}x = -1 \quad , \quad \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4}\right)\,\mathrm{d}x = +1$$

En el intervalo $[-2\,, 0]$ la curva cúbica está sobre la recta, mientras que en el intervalo $[0\,, 2]$ la recta está por encima. Es

$$a(\mathscr{R}) = 1 + 1 = 2\ \mathrm{u}^2$$

Ejercicios

1. Obtén una función cuya derivada sea:

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \cos x - 1$

d) $f(x) = 3e^x - x^2$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ si $x > 0$

2. Halla la primitiva de la función $y = 2x - 1$ que corta al eje de abscisas para $x = -1$.

3. Obtén la primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 1$ que pasa por $P = (2, 1)$

b) $f(x) = x - e^x$ que pasa por el origen.

c) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ que se anula para $x = 1$.

4. Obtén la primitiva de la función $y = x^2 - \operatorname{sen} x$ que pasa por el origen de coordenadas.

5. Obtén la expresión de una función f tal que

$$f'(x) = x^2 + 2\,e^x$$

sabiendo que se anula para $x = 0$.

6. [*] Obtén $f(x)$ sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1\,,1)$ y que su derivada segunda viene dada por:

$$f''(x) = 6x - 12$$

7. [*] Determina la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que para $x = 1$ tiene de tangente a $x + 12y = 13$ y tal que

$$f''(x) = x^2 - 1$$

8. [*] Obtén la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

que pasa por el punto $P = (1\,,4)$.

9. [**] Obtén

$$\int |2x - 2| \, dx$$

¿Qué primitiva por el origen de coordenadas?

10. Halla las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int 5\,dx$ b) $\displaystyle\int x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int x^3\,dx$ f) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^5}\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

11. Halla las primitivas de los siguientes polinomios:

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x + 2$

b) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 7x$

c) $f(x) = 3x^6 + 4x^2 - 1$

d) $f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 9$

e) $f(x) = ax^2 + bx + c$

12. Obtén las siguientes integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int (x^2 - e^x)\,dx$ b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^4} - x^4\right)dx$

c) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{3}{x^5}\right)dx$ d) $\displaystyle\int \left(x - \frac{2}{x}\right)dx$

e) $\displaystyle\int (3x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$ f) $\displaystyle\int (3\,e^x - \cos x)\,dx$

13. Descomponiendo en sumandos las fracciones obtén

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x}\,dx = \int \left(1 - \frac{3}{x}\right)dx = \ldots$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 1}{x}\,dx = \int \left(x - 5 + \frac{1}{x}\right)dx = \ldots$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 5}{2x^3}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2x}{x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x}{x+4}\,dx = 3\int \frac{(x+4) - 4}{x+4}\,dx = \ldots$

14. Obtén las siguientes integrales logarítmicas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - 2x}{\mathrm{e}^x - x^2 + 5}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,\mathrm{d}x$

15. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con la función exponencial:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x-2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3-4}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int (2x-1)\,\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

16. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas de forma potencial:

a) $\displaystyle\int (3x-2)^3\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 6x\left(3x^2-2\right)^5\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$

17. Obtén las siguientes integrales de formas compuestas relacionadas con senos y cosenos:

a) $\displaystyle\int \cos(2x-1)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 3x^4\operatorname{sen}\left(x^5\right)\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(10x)\,\mathrm{d}x$

18. [**] Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=12x-6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene de ecuación $4x-y-7=0$.

19. Calcula:

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x+2}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

20. Calcula el área delimitada por la curva $y=x^3-4x$ con el eje de abscisas en el intervalo $[-1\,,3]$

21. [S/19] Calcule $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$. siendo:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$$

22. [S/19] Calcule

$$\int \left(x^2+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$$

23. [S/19] Se considera la función

$$f(x)=x^3-9x+2$$

Calcule $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

24. [S/19] De una cierta función f, sabemos que su función derivada es

$$f'(x)=3x^2-3$$

Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1\,,3)$.

25. [S/20] Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & \text{si } 2<x<4 \\ \dfrac{x-3}{x} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad.

b) Calcule $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

26. [S/20] Dada la función

$$f(x)=4\,x^3-3\,x+4$$

calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=10$.

27. [S/20] Represente gráficamente la función $g(x)=-x^2+6x-5$ y calcule el área comprendida entre la gráfica de la función g, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$.

28. [S/20] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x<-2 \\ x^2-6 & \text{si } x\ge -2 \end{cases}$$

Esboce la gráfica de f y calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=5$.

Ejercicios Ponencia

29. Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Obtenga su primitiva.

b) Calcule el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2$.

30. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $g(x) = -x^2 + 4x$ y el eje OX.

31. Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y $g(x) = 5 - x$.

32. Se consideran las funciones f y g, definidas en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = 4 - x^2$$

a) Calcule los puntos de corte de sus gráficas.

b) Represente sobre un mismo sistema de coordenadas cartesianas sus gráficas y calcule el área de la región del plano delimitada por ellas.

33. Sea la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Estudie su derivabilidad.

b) Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

34. Dadas las funciones

$$f(x) = -x^2 + 3x + 2 \text{ y } g(x) = 2x^2 - 6x - 10$$

a) Obtenga los puntos de corte de sus gráficas.

b) Calcule el área de la región acotada delimitada por las dos gráficas.

35. Se considera la función f definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + a & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determine a y b para que f sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 2$ y $b = 4$, represente su gráfica .

c) Para $a = 2$ y $b = 4$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

36. Sea f definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b para que la función sea continua en todo punto.

b) Para $a = -2$ y $b = 4$ calcule $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$

37. Dada la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Estudie la monotonía de la función.

b) Calcule el área de la figura limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

38. Se considera la función f definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{3}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Compruebe que es continua para $x = 0$. ¿Es derivable para $x = 0$?

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

39. La función C que mide la concentración plasmática de un fármaco en función del tiempo, medida en mg/l, viene dada por la expresión:

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 4.5\,t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 4 \\ \dfrac{4}{t-2} & \text{si} \quad t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido, en horas, después de administrar el fármaco.

a) Estudie la continuidad de la función.

b) ¿En qué momento se detecta la concentración máxima del fármaco en la sangre y cuál es dicha concentración?

c) Esboce la gráfica de C.

d) Calcule el área bajo la curva de C entre las 0 horas y las 6 horas.

40. La temperatura en el interior de un horno de cerámica viene dada por la función

$$f(t) = -t^2 + 4t + 5 \ , \ t \in [0\,,5]$$

donde t representa el tiempo en horas y $f(t)$ está expresada en cientos de C

a) Estudie su monotonía y calcule la temperatura máxima alcanzada.

b) Represente gráficamente $f(t)$.

c) Calcule $\displaystyle\int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t$

41. Una empresa conoce que el gasto instantáneo de combustible que le genera una de sus máquinas viene dado por la expresión

$$f(x) = x \cdot (x-5) \cdot (x-7) \ , \ x \in [0\,,5]$$

donde x viene dado en horas.

a) Calcule para qué valor de x se tiene que f alcanza un valor máximo.

b) Calcule el gasto total de combustible consumido.

42. [*] De la función $C(q)$ que representa los costes de producción de una empresa, en miles de euros, en función de la cantidad fabricada q, en miles de kilogramos, se sabe que su derivada viene dada por

$$C'(q) = 60q^2 - 80q + 35$$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $C(q)$ y esboce la gráfica de la función $C'(q)$ en el intervalo $(0\,,1.5)$.

b) Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función de costes $C(q)$.

c) ¿Cuál es el coste adicional que debe asumir la empresa si decide pasar de fabricar 1000 kg a fabricar 1500 kg?

Cuestiones

1. Prueba que si $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es una primitiva de la función f, entonces lo es también la función

$$x \in \mathbb{D} \longmapsto F(x) + C$$

donde C es una constante cualquiera.

2. Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

¿Es una primitiva de f la función F definida por

$$F(x) = \ln(x) \quad , \quad x > 0?$$

3. [*] Dos funciones f y g tienen la misma función derivada. ¿Es entonces $f-g$ una función constante? ¿Es $f-g$ constante en cada intervalo del dominio de derivabilidad?

4. Una función coincide en todo punto con su derivada. ¿De qué función puede tratarse?

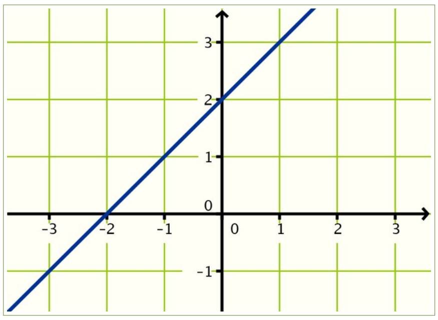
5. Comprueba que si $n \neq 1$:

$$\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

6. Una primitiva de la función continua f es la función F. Obtén una primitiva de f que pase por el origen de coordenadas.

7. Si la gráfica de una función $y = f(x)$ es una línea recta, ¿cómo es la gráfica de una primitiva de ella?

8. Obtén una primitiva de la función representada a continuación:



9. Comprueba que

$$\int 2x\cos x\,\mathrm{d}x \neq x^2 \operatorname{sen} x + C$$

10. Tras analizar la cuestión anterior: ¿Es la integral indefinida de un producto el producto de las integrales indefinidas de los factores?

11. Halla $f(x)$ sabiendo que

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C$

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(3x+1) + C$

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(2x+1) + C$

12. Obtén la función u sabiendo que:

$$\int 2x \cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = u\left(x^2\right) + C$$

13. [*] Dada la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

encuentra una función continua $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

i. $F'(x) = f(x) \quad , \quad x \neq 0$

ii. $F(0) = 5$

¿Es F derivable para $x = 0$?

14. [*] Demuestra que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

no es la función derivada de ninguna $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Autoevaluación

1. Obtén la primitiva de las funciones

a) $\displaystyle\int \left(x^3 - 3x^4\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \left(5\,\mathrm{e}^x - \frac{5}{x}\right) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int (3\cos x - 6\,\mathrm{sen}\, x)\, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^3 + 2x - \sqrt{x}}{x^2}\, \mathrm{d}x$

2. Halla la expresión de una función $y = f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 12x^2 - 6x$ y que en el punto $(1\,,2)$ presenta un extremo relativo.

3. Calcula las integrales compuestas siguientes:

a) $\displaystyle\int 3x^4 \cos\left(x^5 - 1\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \left(3x^2 + 1\right) \mathrm{e}^{x^3+x-1}\, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{3x}{4x^2 - 1}\, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x \cdot \left(x^2 - 4\right)^3 \mathrm{d}x$

4. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad.

b) Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\, \mathrm{d}x$.

c) Obtengamos la primitiva cuya gráfica pase por el origen de coordenadas

5. Dada la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$$

¿Qué area encierra su gráfica con el eje de abscisas?

6. Dibuje y calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y $g(x) = 5 - x$.

7. Halle a para que sea $\displaystyle\int_{1}^{0} (x - a)\, \mathrm{d}x = 1$

Autoevaluación

1. Aplicando la linealidad:

a) $I = \int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{5}x^5 + C$

b) $I = 5\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{e}^x - 5\ln x + C$

c) $I = 3\int \cos x\,\mathrm{d}x - 6\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

$= 3\operatorname{sen} x + 6\cos x + C$

d) $I = \int \left(1 + 3x^{-2} - x^{-\frac{5}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$= x - 3x^{-1} + \frac{2}{3}x^{-3/2} + C$

2. Al ser $f''(x) = 12x^2 - 6x$ obtendremos la primera derivada integrando:

$$f'(x) = \int \left(12x^2 - 6x\right)\mathrm{d}x = 4x^3 - 3x^2 + C$$

Como para $x = 1$ hay un extremo, para este valor se anula la derivada:

$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 4 - 3 + C = 0 \;\rightarrow\; C = -1$$

Así:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$$

Ahora integrando ésta obtendremos la función:

$$f(x) = \int \left(4x^3 - 3x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = x^4 - x^3 - x + C$$

Como la gráfica pasa por el punto $(1\,,2)$:

$$f(1) = 2 \;\rightarrow\; 1 - 1 - 1 + C = 2 \;\rightarrow\; C = 3$$

Tenemos, pues:

$$f(x) = x^4 - x^3 - x + 3$$

3. Observemos que son integrales de formas compuestas:

a) Es de tipo seno y coseno:

$$I = \frac{3}{5}\int 5x^4\cos\left(x^5 - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\operatorname{sen}\left(x^5 - 1\right) + C$$

b) Es de tipo exponencial:

$$\int \left(3x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{x^3+x-1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3+x-1} + C$$

c) Es de tipo logarítmico:

$$I = \frac{3}{8}\int \frac{8x}{4x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\ln\left(4x^2 - 1\right) + C$$

d) Es de tipo potencial:

$$I = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2 - 4\right)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2 - 4\right)^4}{4} + C =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x^2 - 4\right)^4 + C$$

4. Es

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

5. Tenemos

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$$

6. Para dibujar

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \text{ y } g(x) = 5 - x.$$

7. Halle a para que sea $\int_1^0 (x - a)\,\mathrm{d}x = 1$