TEMA 5

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Contenidos

1. Recta tangente a una curva en un punto.
2. Variación de una función.
3. Extremos y derivada cero.
4. Curvatura. Puntos de inflexión.
5. Representación gráfica.
6. Problemas de optimización.

Tiempo estimado

16 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conocer la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de una curva o de la recta tangente.
2. Saber usar la derivada de una función para conocer las regiones de crecimiento / decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos así como sus regiones de concavidad / convexidad y sus puntos de inflexión.
3. Saber aplicar los conocimientos anteriores para hallar la representación gráfica de las funciones tras conocer sus asíntotas.
4. Utilizar los conocimientos anteriores para resolver problemas de optimización, procedentes de situaciones reales de carácter económico y sociológico, cuya expresión analítica vendría dada en el texto.

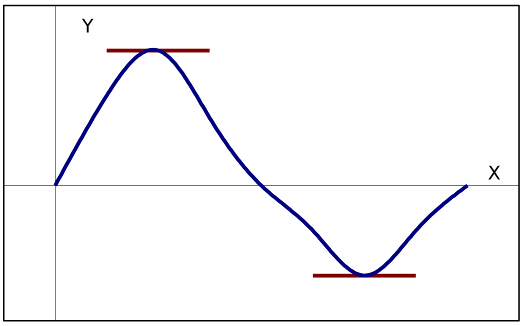
©José Álvarez Fajardo bajo una licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons

1.Tangente a una curva.

El problema de obtener la recta tangente a una curva es muy antiguo, y se trataba inicialmente de un problema geométrico.

Pero posteriormente, el matemático francés Fermat lo relacionó con un problema con el que, aparentemente, no guardaba relación: ¿cuáles son los valores máximos y mínimos de una función?

La gráfica siguiente quizá nos permita observar la conexión entre ambos:



Observemos que en los puntos de los extremos tenemos que la tangente es horizontal: la pendiente en ellos es cero. Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la pendiente de una curva en un punto cualquiera.

Esto llevó directamente al concepto de derivada, que puede usarse para definir la recta tangente a la gráfica de una función:

> La tangente a la curva $y = f(x)$ de una función derivable en el punto de abscisa $x = a$ tiene de pendiente $m = f'(a)$.
>
> Por ello, la ecuación de dicha recta tangente es:
>
> $$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

- <u>Ejemplo</u>: obtengamos la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2-4$ para $x=1$.

  Derivamos

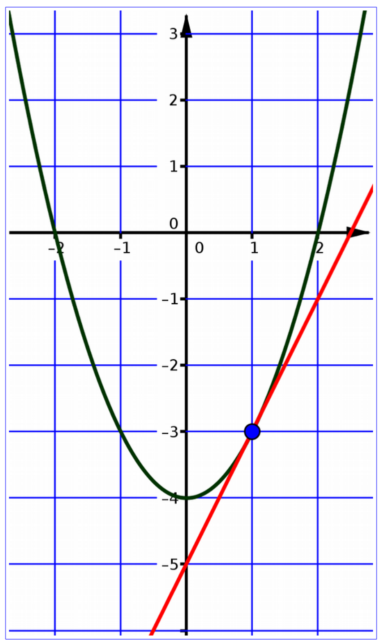
  $$f(x) = x^2 - 4 \;\rightarrow\; f'(x) = 2x$$

  Sustituimos en la función y en la derivada:

  $$f(1) = -3 \quad , \quad f'(1) = 2$$

  La fórmula es:

  $$y - (-3) = 2 \cdot (x - 1) \;\rightarrow\; y = 2x - 5$$

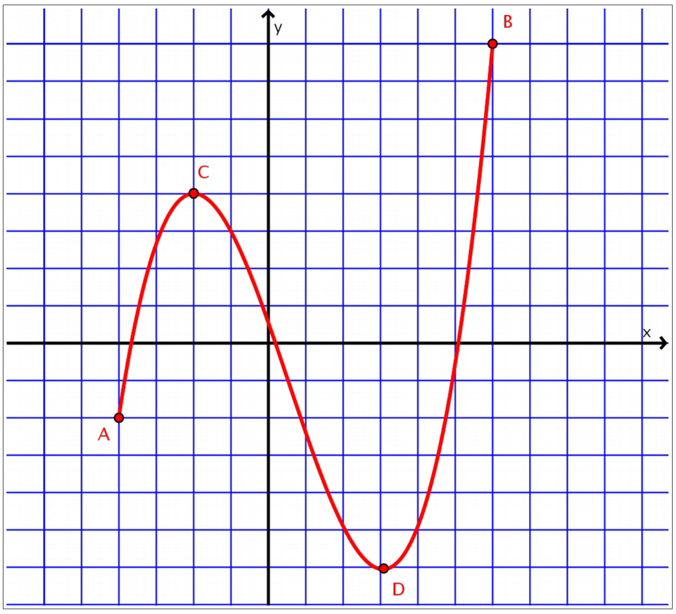


2.Variación de una función.

❑ Gráficamente.

Cuando tenemos la gráfica de una función cualquiera, es fácil reconocer en qué intervalos es creciente o decreciente, y dónde alcanza sus valores máximos y mínimos.

Vamos a estudiarlo con la función $f : [-4\,, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica tenemos a continuación:



Monotonía:

La función es creciente en el intervalo $[-4\,, -2]$ y en el intervalo $[3\,, 6]$. Así, en esos intervalos al aumentar la variable independiente (x) también aumenta la dependiente (y).

Y es claro que en el intervalo $[-2\,, 3]$ la función es decreciente. Así, en ese intervalo, al aumentar la variable x disminuye la variable y.

En general:

Sea f una función definida en un intervalo I.

Decimos que f es creciente en el intervalo, y escribimos $f \nearrow$ en I, si

$$x < x' \text{ en } I \;\longrightarrow\; f(x) \leq f(x')$$

Decimos que f es decreciente en el intervalo, y escribimos $f \searrow$ en I, si

$$x < x' \text{ en } I \;\longrightarrow\; f(x) \geq f(x')$$

Si las desigualdades son estrictas, se dice que
a) f es estrictamente creciente en I (f $\nearrow\nearrow$ en I) en el primer caso.
b) f es estrictamente decreciente en I (f $\searrow\searrow$ en I) en el segundo.

Nota: puede ocurrir que una función sea constante en un tramo. Para esos casos usaremos las expresiones “no creciente” o “no decreciente”

Extremos relativos:

Hay un mínimo relativo para $x = -4$: A es el punto más bajo de su entorno.

Hay un mínimo relativo para $x = 3$: el punto D es el más bajo de su entorno.

Hay un máximo relativo para $x = -2$: C es el punto más alto de su entorno.

Hay un máximo relativo para $x = 6$: el punto B es el más alto de su entorno.

Extremos absolutos:

Para $x = 3$ la función alcanza su mínimo absoluto, pues el punto D es el más bajo de todo el intervalo donde está definida.

Para $x = 6$ la función alcanza su máximo absoluto, pues el punto B es el más alto de todo el intervalo donde está definida.

En general:

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $a \in I$.

Decimos que f presenta un máximo relativo para $x = a$ si en un entorno suyo la función no es superior a $f(a)$.

Si, además, es $f \leq f(a)$ en todo el intervalo I se dice que el máximo absoluto de la función en I se alcanza para $x = a$.

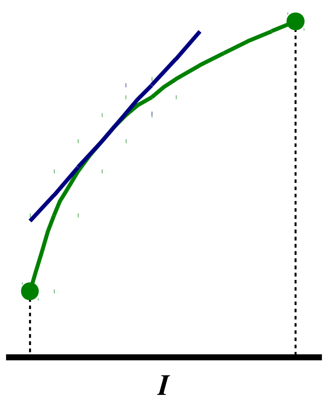
Decimos que f presenta un mínimo relativo para $x = a$ si en un entorno suyo la función no es inferior a $f(a)$.

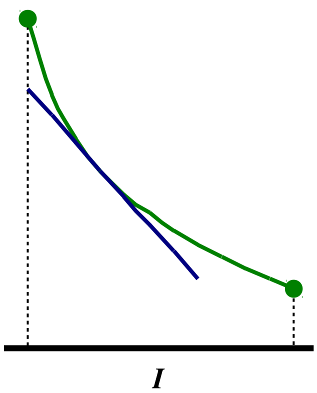
Si, además, es $f \geq f(a)$ en todo el intervalo I se dice que el mínimo absoluto de la función en I se alcanza para $x = a$.

Se dice que un extremo relativo es interior si el valor en el que se alcanza está en el interior del intervalo I.

Algebraicamente.

Veremos que la derivada de una función derivable $y = f(x)$ suministra una gran información sobre su variación. Observemos las gráficas siguientes:





La recta tangente marca el crecimiento y el decrecimiento de la función:

- ✔ Si en todos los puntos de un intervalo I las rectas tangentes son crecientes (pendiente positiva), la función crece en I.
- ✔ Si en todos los puntos de un intervalo I las rectas tangentes son decrecientes (pendiente negativa), la función decrece en I.

De ahí se deduce la siguiente propiedad de las derivadas:

> Sea $y = f(x)$ una función derivable en todo punto del intervalo I.
> - Si $f' > 0$ en I entonces f es creciente en I.
> - Si $f' < 0$ en I entonces f es decreciente en I.

> Tenemos así un procedimiento sencillo para averiguar en qué intervalos es creciente o decreciente una función f:
>
> a) Hallamos su derivada.
>
> b) Estudiamos el signo (ceros e intervalos) de la derivada.
>
> c) Para un intervalo *I*:
>
> f' positiva en *I* → f ↗ en *I*
>
> f' negativa en *I* → f ↘ en *I*

☞ Ejemplo: estudiemos la variación de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

a) Hallamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12x$

b) Estudiamos el signo de la derivada (ceros e intervalos de signo):

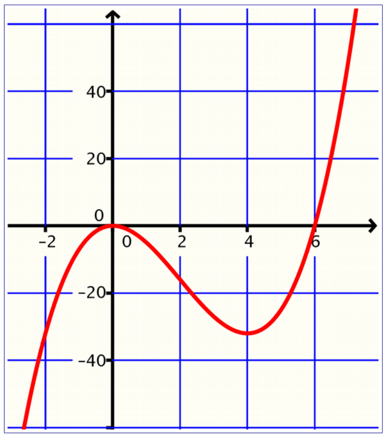
Signo de f '

+ $x = 0$ – $x = 4$ +

c) Deducimos el siguiente esquema de monotonía de la gráfica:

Monotonía de f

$f\nearrow$ $x = 0$ $f\searrow$ $x = 4$ $f\nearrow$



d) Extremos:

Para $x = 0$ hay un máximo relativo (la función pasa de subir a bajar).

Para $x = 4$ hay un mínimo relativo (se pasa de bajar a subir).

e) La siguiente tabla resume la variación de f:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	–32	↗	$+\infty$

☞ Ejemplo: Estudiemos la variación de la función $y = t^4 - 8t^2 + 10$.

a) Hallamos la derivada: $y' = 4t^3 - 16t$

b) Estudiamos el signo de la derivada (ceros e intervalos de signo):

Signo de f '

–   0 ($t = -2$)   +   0 ($t = 0$)   –   0 ($t = 2$)   +

c) Deducimos el siguiente esquema de monotonía de la gráfica:

Monotonía de f

$f\searrow$ $t = -2$ $f\nearrow$ $t = 0$ $f\searrow$ $t = 2$ $f\nearrow$

d) Extremos:

Para $t = -2$ hay un mínimo relativo (se pasa de bajar a subir).

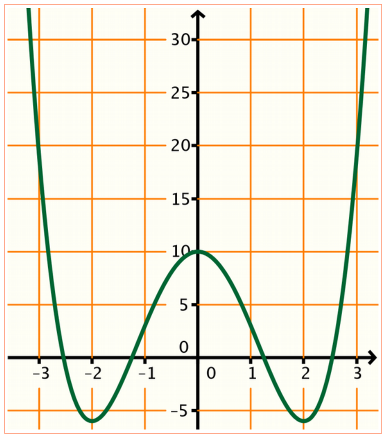
Para $t = 0$ hay un máximo relativo (la función pasa de subir a bajar).

Para $t = 2$ hay un mínimo relativo (se pasa de bajar a subir).

e) La siguiente tabla resume la variación de f:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	10	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

A la derecha tenemos representada la gráfica.



3.Extremos y derivada cero.

Si nos fijamos bien, deducimos de lo anterior que si una función derivable tiene un extremos interior, la derivada es cero en él.

A los máximos y mínimos de una función se les llama habitualmente puntos extremos.

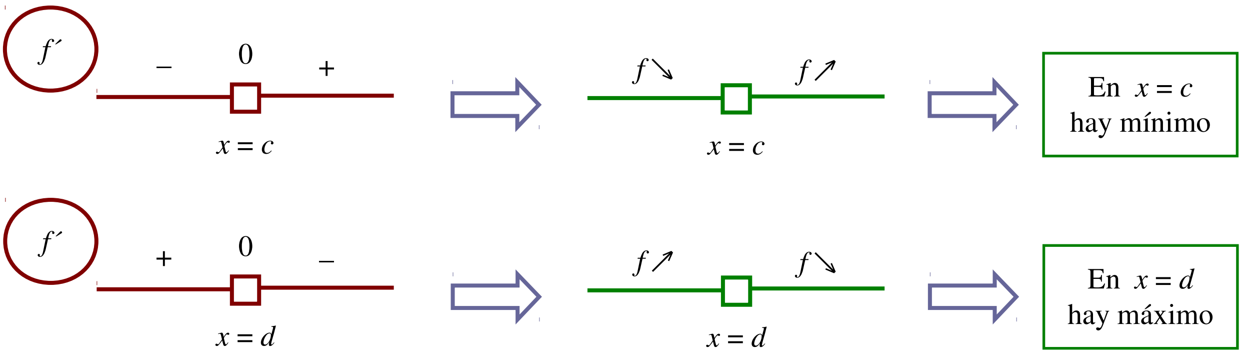
Aquí tenemos un sencillo criterio que nos garantiza un caso en el que la derivada es cero y sí hay extremo relativo.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en todo punto del intervalo I y sea $x = a$ un punto interior de I.

- Si $f' < 0$ para $x < a$ y $f' > 0$ para $x > a$ entonces f tiene un mínimo relativo para $x = a$.
- Si $f' > 0$ para $x < a$ y $f' < 0$ para $x > a$ entonces f tiene un máximo relativo para $x = a$.

Importante: el criterio de la izquierda es válido incluso si para x = a no hay derivada.

Así, tenemos los siguientes esquemas de signo:



☞ Ejemplo: consideremos la función $y = x^3 - 3x^2$.

Es fácil comprobar que sus ceros son $x = 0$ y $x = 2$.

Estudiemos el signo de la derivada y observemos que cambia en ellos.

Comprueba que tiene sus extremos relativos para $x = 0$ y para $x = 2$.

Podríamos pensar que allí donde la derivada es cero hay siempre un extremo. Eso no es así, ya que la derivada puede ser cero y no haber cambio de signo, como veremos a continuación.

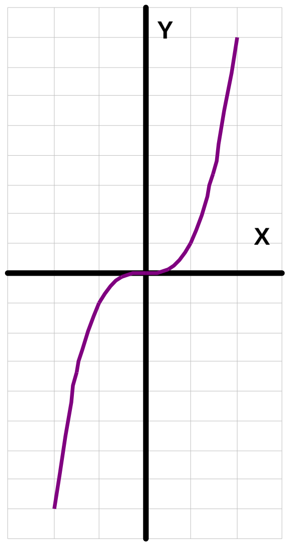
☞ <u>Ejemplo</u>: la función $f(x)=x^3$ es un caso sencillo que nos permitirá comprobarlo.

Para estudiar su variación, hallemos su derivada y estudiemos su signo. Es $f'(x)=3x^2$:

En el punto $(0,0)$ la derivada de la función es cero. Resulta pues que la recta tangente en dicho punto es horizontal. Pero ese punto no es ni un máximo ni un mínimo.

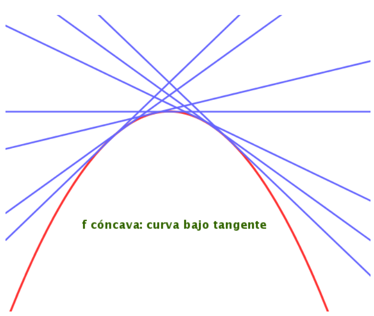
Se le designa a veces como un **punto de silla**.

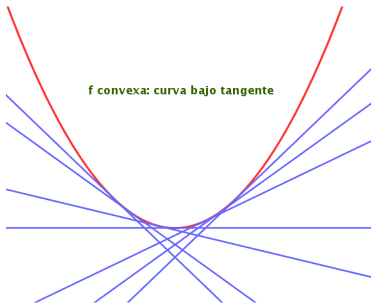
Observemos cómo en el punto $(0,0)$ la recta tangente es el eje **X**, que atraviesa a la curva. Esto no está de acuerdo con nuestra idea intuitiva de que una recta tangente corta a una curva de tal modo que en el punto de tangencia no puede atravesarla.



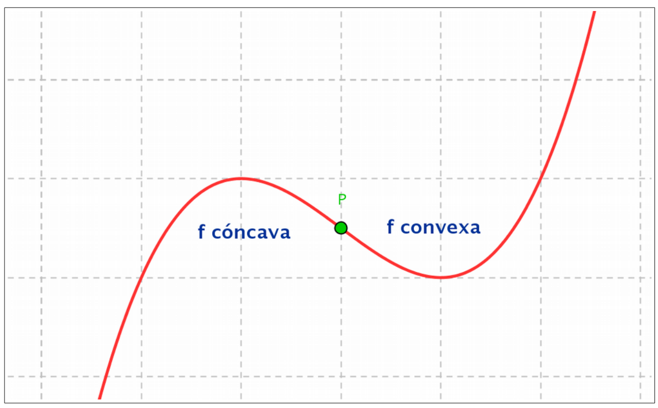
4. Curvatura. Puntos de inflexión.

La derivada también nos permite estudiar de forma sencilla en qué intervalos una función es cóncava o convexa. Recordemos:





A los puntos en los que cambia la curvatura se les llama puntos de inflexión:



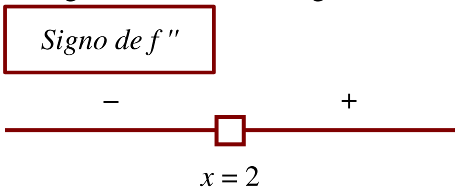
El criterio siguiente es sencillo y puede deducirse del relativo a la monotonía:

> Sea $y = f(x)$ una función dos veces derivable en el intervalo I.
> a) Si $f'' > 0$ en I entonces f es convexa en I.
> b) Si $f'' < 0$ en I entonces f es cóncava en I.

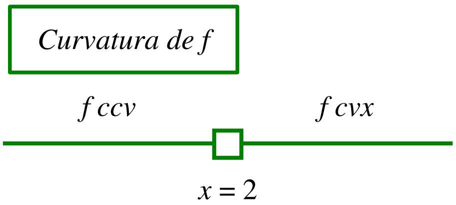
☛ Ejemplo: consideremos la función $y = x^3 - 6x^2$. Estudia su curvatura.

a) Hallamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 12$

b) Estudiamos el signo de la derivada segunda:

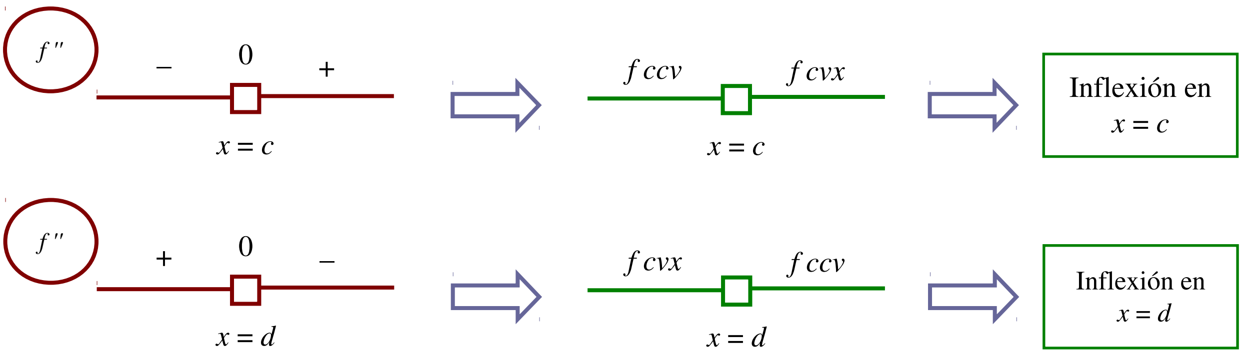


c) Del esquema de signos de la derivada segunda deducimos el siguiente esquema de curvatura:



d) Observemos que para $x = 2$ hay un punto de inflexión, pues en él la gráfica pasa de cóncava a convexa.

He aquí cómo encontrar los puntos de inflexión:



☛ Ejemplo: Hallemos a sabiendo que la curva $y = x^3 + ax^2 + x - 5$ presenta un punto de inflexión para $x = 2$.

a) Primero hallamos la derivada segunda: $y'' = 6x + 2a$.

b) En el punto de inflexión la derivada segunda debe ser cero:

$$\text{si } x = 2 \text{ es } y'' = 0 \rightarrow 6 \cdot 2 + 2a = 0 \rightarrow a = -6$$

5.Representación gráfica.

Hubo un tiempo, no muy lejano, en el que las gráficas de las funciones sólo podían obtenerse de una forma: a mano. Uno tomaba unos bolígrafos de colores, una cuartilla de papel (cuadriculada si era posible) y una regla. Si eras afortunado, tenías una calculadora.

Con la fórmula delante, $y=f(x)$, se pasaba a estudiar los siguientes puntos:

- ✔ Dominio y continuidad.
- ✔ Variación: monotonía y extremos.
- ✔ Asíntotas.
- ✔ Tabla de valores.

Una vez concluido ese análisis, se pasaba a dibujar en primer lugar las asíntotas -si las había- y los puntos remarcados en la tabla de valores. Finalmente, con un poco de pericia, se realizaba el dibujo a mano alzada.

Bastante tiempo después se popularizaron las computadoras personales, y con las hojas de cálculo podían obtenerse buenas gráficas siguiendo un proceso que aún no nos libraba de estudiar buena parte de esos puntos. Pero suponía un gran salto cualitativo.

En el momento de escribir esto disponemos ya de programas de computación, muy fáciles de usar, que nos liberan de todo ese trabajo, y nos permiten centrarnos en la interpretación y en la obtención de soluciones.

No obstante lo anterior, vamos a realizar el estudio señalado arriba con tres simples ejemplos:

El hecho de que existan esos programas, fáciles de usar, no significa que no debamos saber realizar el estudio de los puntos anteriores.

Todos debemos memorizar las tablas de multiplicar, y saber realizar **simples** productos y divisiones manualmente. Pero una pero una vez aprendido esto, los productos tediosos los hacen las calculadoras ;-)

☞ Ejemplo 1: Estudiemos y representemos

$$y=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

☞ Ejemplo 2: Estudiemos y representemos

$$y=x^3-6x^2+9x$$

☞ Ejemplo 3: Estudiemos y representemos

$$y=\frac{3x+6}{x-2}$$

6.Problemas de optimización.

Comencemos con una sencilla pero muy importante propiedad de las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

Si $y = f(x)$ es una función continua en intervalo cerrado $[a\,,b]$, entonces está acotada y alcanza en él sus valores extremos.

Un intervalo cerrado y acotado se denomina usualmente intervalo compacto.

Si además podemos usar las derivadas, haremos:

- ✔ Un estudio de signo de la derivada.
- ✔ Un esquema de variación cuidando de incluir los extremos del intervalo, puntos angulosos si los hubiese y los ceros de la derivada.

☞ Ejemplo: en un experimento que dura cuatro horas, la temperatura de un objeto viene dada por la siguiente fórmula:

$$T = 4t^3 - 18t^2 + 15t - 2$$

donde T es la temperatura en grados centígrados y t es el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la medición. Obtengamos las temperaturas máxima y mínima.

Observemos que como la función temperatura es continua, alcanzará sus valores máximo y mínimo en cualquier intervalo cerrado.

a) Hallamos la derivada:

$$T' = 12t^2 - 36t + 15$$

b) Estudiamos el signo de la derivada (recuerda: ceros e intervalos de signo):

Signo de T '

+	$t = 0{,}5$	–	$t = 2{,}5$	+

c) Del esquema de signos de la derivada deducimos el siguiente esquema de monotonía de la gráfica:

Monotonía de T

$T\nearrow$	$t = 0{,}5$	$T\searrow$	$t = 2{,}5$	$T\nearrow$

d) Tabla de variación de la temperatura:

t	0		0,5		2,5		4
T	–2	↗	1,5	↘	–14,5	↗	26

Es muy importante formar la tabla de variación de T, pues el máximo y el mínimos absolutos pueden alcanzarse tanto en los valores inicial o final como en los extremos relativos interiores.

e) Conclusión:

La temperatura máxima fue 26 ºC y se alcanzó a las cuatro horas.

La temperatura mínima fue –14,5 ºC y se alcanzó a las dos horas y media del inicio.

Ejercicios

1. [S/97] Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2} & \text{si} \quad x<-2 \\ -x & \text{si} \quad -2\le x<1 \\ x^2-3 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente *f*.

b) Estudia su continuidad.

c) Estudia su monotonía y obtén sus asíntotas.

2. [S/97] Se ha estudiado la evolución de la ganancia y en pesetas, en cada instante desde un tiempo inicial, hasta pasados 5 años, por la fabricación de un determinado producto y se ha modelizado funcionalmente dicha evolución así:

Durante el primer año: $y=2t^2$

Durante el segundo y tercer años: $y=4t-2$

Durante el resto: $y=e^{3-t}$

a) Construye la gráfica que muestra la evolución de la ganancia.

b) Explica la continuidad de dicha función.

3. [S/97] Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2^x & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Representa la gráfica de *f*.

b) ¿En qué puntos la función no es continua?

c) ¿Tiene máximo o mínimo la función f?

4. [S/98] La siguiente función

$$f(x)=\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$$

representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

a) Represente gráficamente dicha función.

b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

5. [S/98] Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x<0 \\ 2^{2-x} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de esa función y analice su comportamiento en los posibles puntos de discontinuidad.

b) Represente gráficamente la función.

6. [S/98]Dada $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax+3 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Razone si para algún valor de a la función es continua en $x=0$.

b) Obtenga, si las hay, las asíntotas horizontales y verticales de la función.

c) Dibuje la gráfica de la función para $a=0$.

7. [S/98] Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B, en millones de pesetas, depende del tiempo t, en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función:

$$B(t)=-1'5t^2+168t-954$$

a) Dibuje la gráfica de la función B.

b) Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

c) Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficios.

8. [S/98] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 3e^x & \text{si} \quad -3\le x\le 0 \\ -x^2+2x+3 & \text{si} \quad 0<x\le 3 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) ¿Es continua en $x=0$?.

c) Calcule su máximo y su mínimo absolutos en su dominio de definición.

9. [S/99] Una compañía que fabrica bolígrafos lanza al mercado un nuevo producto. Se supone que la relación entre el precio por unidad, x, del nuevo bolígrafo y el beneficio en millones de pesetas, $b(x)$, viene dado por la función

$$b(x)=-x^2+130x-3000$$

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada bolígrafo a 50 Pta.?

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada bolígrafo para obtener un beneficio positivo?

c) Calcule a qué precio debe vender cada bolígrafo para que el beneficio sea máximo.

10. [S/99] Los dueños de un manantial de agua mineral calculan que, si venden cada botella de agua a un precio de x Pta., tendrán una ganancia diaria (en miles de pesetas):

$$g(x)=-\frac{x^2}{10}+25x-1500$$

a) Represente gráficamente la función $g(x)$.

b) ¿Cuál es el precio con el que se alcanza el máximo de ganancia?

c) ¿Cuál es la ganancia máxima diaria que puede obtenerse?

11. [S/99] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si} \quad x\le -1 \\ 2x+2 & \text{si} \quad -1<x\le 2 \\ -x^2+8x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad.

b) Represente gráficamente la función y, a la vista de sus gráfica, determine sus máximos y mínimos, así como el crecimiento y decrecimiento.

12. [S/99] Dada la función

$$f(x)=\frac{320x+25}{2x+5}$$

a) Estudie la continuidad de f y calcule su función derivada f'.

b) Razone si existen o no extremos relativos de la función f.

c) Calcule las asíntotas de la función.

13. [S/99]

a) La gráfica de la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ pasa por el punto $(1,0)$ y tiene un máximo relativo en el punto $(0,4)$.

Halle los coeficientes a, b y c.

b) Obtenga los máximos y los mínimos y los puntos de inflexión de la función definida por $g(x)=x^3-6x^2+20$.

14. [S/99] Los ingresos $I(x)$ y los costes $C(x)$, en millones de pesetas de una fábrica de bolígrafos, dependen del precio de venta x de cada bolígrafo (en pesetas) según las funciones:

$$I(x)=4x-9 \quad \text{y} \quad C(x)=0'01x^2+3x$$

El beneficio anual es $B(x)=I(x)-C(x)$

a) ¿Cuál debe ser el precio de venta para obtener el máximo beneficio?

b) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

c) Represente gráficamente la función beneficio.

d) Razone (sobre la gráfica o sobre la función beneficio) para qué precios de venta tendría pérdidas esta empresa.

15. [S/99] Siendo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por la expresión

$$f(x)=\begin{cases} 3x+5a & \text{si} \quad x\le 0 \\ bx^2+3 & \text{si} \quad 0<x<2 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f según los valores de las constantes a y b.

b) Represente la gráfica de la función para $a = 1$ y $b = -1$, e indique los intervalos de crecimiento de dicha gráfica.

c) Justifique si la función del apartado b) presenta en el intervalo $(2+\infty)$ algún punto de tangente horizontal.

16. [S/99] Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) Halle el valor que deben tomar los parámetros a, b y c para que *f* tenga un máximo para $x=1$, un punto de inflexión en $x=2$ y corte al eje **Y** en el punto de ordenada -1.

b) Represente, gráficamente, la función $g(x)=x^3-3x$, determinando los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos.

17. [S/00] El beneficio de una empresa viene dado por la función

$$f(x)=\frac{225}{2}+20x-\frac{1}{2}x^2$$

donde x representa el gasto en publicidad.

a) Calcule el gasto x a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.

c) Represente gráficamente la función *f*.

d) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

18. [S/00] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<2 \\ x^2-8x+17 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

c) Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde $f'(x)=0$?

19. [S/00] El precio en bolsa de las acciones de una empresa durante las cinco horas que dura una jornada bursátil, medido en pesetas, viene dado por

$$C:[0,5]\rightarrow \mathbb{R} \quad ,, \quad C(t)=100(t^2-6t+25)$$

donde t representa el tiempo medido en horas.

a) Dibuje la gráfica de C, indicando las subidas y bajadas en el precio de cada acción durante la sesión, así como su precio en el instante inicial.

b) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?

c) Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

20. [S/00]

a) Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$g(x)=-\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad h(x)=x\,\text{sen}\,x$$

b) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(0,1)$.

21. [S/00] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x<2 \\ -x+4 & \text{si} \quad 2\leq x<4 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x\geq 4 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Represente gráficamente la función.

c) Halle sus intervalos de monotonía.

22. [S/00] La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión:

$$f(t)=\frac{5t}{2}-\frac{t^2}{2}$$

a) Represente gráficamente f.

b) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 4 segundos? ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo?

c) ¿En qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

23. [S/00]

a) Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que f tenga un punto de inflexión en $(-1,2)$.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=x^3-1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3.

24.[S/00] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x\leq -1 \\ -x^2+3 & \text{si} \quad -1<x<2 \\ x-3 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente y, a la vista de su gráfica, determine sus máximos y mínimos relativos, así como su crecimiento y decrecimiento.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

25.[S/00] La derivada de la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es $f'(x)=x^2+x-6$.

a) Determine, si es posible, para qué valores de x alcanza f su máximo y su mínimo relativos.

b) Calcule un punto de inflexión de esta función y determine si es único o pueden existir otros.

c) Sabiendo que $f(0)=3$, deduzca razonadamente si es $f(1)<3$ o $f(1)>3$.

26.[S/00] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{4} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$$

a) Represente gráficamente la función.

b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos.

27.[S/01]Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

a) Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

28.[S/01]Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función

$$f(x)=\frac{50x-100}{2x+5} \quad , \quad x\geq 0$$

donde x representa los años de vida de la empresa.

a) Represente gráficamente la función $y=f(x)$ para $x\in(-\infty,+\infty)$, indicando dominio, cortes con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

b) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

29.[S/01]Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2-x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad.

c) Obtenga, si existe, la derivada de f en $x = 1/2$, $x = -1/2$ y $x = 0$.

d) Obtenga sus extremos relativos.

30.[S/01] El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de pesetas produce la ganancia de $f(x)$ millones de pesetas:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 5 \\ \dfrac{5}{2x} & \text{si} \quad x>5 \end{cases}.$$

a) Represente la función $f(x)$.

b) Halle la inversión que produce máxima ganancia.

c) ¿Para qué inversión la ganancia es nula?

d) Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

31.[S/01]Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "*h*" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "*t*" (en segundos) viene dada por la expresión:

$$h(t)=-5t^2+40t$$

a) ¿Cuál es la altura máxima? ¿Cuándo se alcanza?

b) Represente gráficamente la función h.

c) ¿Cuándo está el objeto a 60 metros de altura?

d) ¿En qué instante llega al suelo?

32.[S/01]La gráfica de la función derivada de una función $f(x)$ es una parábola de vértice $(1,-4)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$.

A partir de la gráfica de f' :

a) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de f. ¿Para qué valores de x se alcanzan los máximos y mínimos relativos?

b) Esboce la forma de la gráfica de una función cuya derivada sea la parábola dada.

33.[S/01] El consumo de luz (en miles de pesetas) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido, nos viene dado por la expresión:

$$f(t)=-\frac{1}{5}t^2+2t+10 \qquad 0\le t\le 12$$

a) ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?

b) ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?

c) Represente gráficamente la función.

34.[S/01]Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "*x*" euros, su beneficio diario, en euros, será:

$$B(x)=-10x^2+100x-210$$

a) Represente la función precio–beneficio.

b) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?

c) Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

35.[S/01]

a) Dada la función $f(x)=x^3+bx+c$, determine los valores de "*b*" y "*c*" sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto $(-1,3)$.

b) Calcule "*a*" para que el valor mínimo de la función $g(x)=x^2+2x+a$ sea igual a 8.

36.[S/02] El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilogramos de un artículo viene dado por la función:

$$f(x)=-0'01x^2+3'6x-180$$

a) Represente gráficamente esta función.

b) Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

c) Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

37.[S/02] Dada la función $f(x)=-x^3+3x$:

a) Determine sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Represéntela gráficamente.

c) Obtenga las ecuaciones de las dos rectas tangentes a su gráfica que tienen pendiente cero y diga cuáles son los puntos de tangencia.

38.[S/02] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}-t^3+5t^2 & \text{si} \quad 0\le t<3\\ -t^2+12t-9 & \text{si} \quad 3\le t\le 5\\ 2t+16 & \text{si} \quad 5\le t\le 10\end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f para $t=3$ y $t=5$.

b) Razone si f posee algún punto de inflexión y calcúlelo, en caso afirmativo.

39.[S/02] Sea x el precio de venta, en euros, del litro de aceite de oliva virgen extra. Y sea

$$f(x)=2-\frac{4}{x+1} \quad ,, \quad x\ge 0$$

la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.

a) Represente la función *f.*

b) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?

c) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

40.[S/02] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+11 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule sus extremos.

c) ¿Existe algún punto donde la pendiente de la recta tangente a su gráfica sea cero? En caso afirmativo, determine cuál es.

41.[S/02] Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$

a) Halle el valor de los coeficientes a, b y c, si se sabe que en el origen su gráfica posee un extremo relativo y que el punto $(2,-16)$ es un punto de inflexión.

b) Para $a=1$, $b=1$ y $c=0$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=-2$.

42.[S/02] Sea la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$.

a) Represente gráficamente su función derivada determinando los puntos de corte con el eje de abscisas y su vértice.

b) Halle los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a $y=-3x+3$.

c) Calcule los máximos y los mínimos de f.

43.[S/02] Se considera la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ -x^2+a & \text{si} \quad -1\leq x<1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

a) Halle los valores de a para los que f es continua y derivable.

b) Para $a=4$, halle las asíntotas y extremos relativos.

44.[S/02]

a) Dada la función $f(x)=\frac{a}{x}+bx^2$, calcule los valores de los parámetros *"a"* y *"b"* para que f tenga un extremos relativo en el punto $(1,3)$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=x\cdot\ln x$ en el punto de abscisa 1.

Cuestiones

1. Explica por qué una función polinómica de segundo grado siempre tiene un punto de tangente horizontal.

2. La recta tangente a una curva, ¿puede cortarse con ella en varios puntos o sólo en uno?

3. Una función tiene en un punto una recta tangente horizontal. ¿Debe ser ese punto un extremo relativo?

4. Dibuja una función en un intervalo de tal manera que su mínimo absoluto sea un punto anguloso. ¿Es la derivada cero en ese mínimo?

5. Si una función polinómica tiene para x = a una inflexión, ¿cuánto es la derivada segunda para ese valor?

6. ¿Cuántos puntos de inflexión como máximo puede tener una función de cuarto grado?

Autoevaluación

1. La siguiente función

$$f(x)=\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$$

representa el beneficio, expresado en miles de euros, que obtiene una empresa al fabricar x unidades de un determinado producto.

a) Represente gráficamente dicha función.

b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

2. Represente, gráficamente, la función $g(x)=x^3-3x$, determinando los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos.

3. Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$

a) Halle el valor de los coeficientes *a*, *b* y *c*, si se sabe que en el origen su gráfica posee un extremo relativo y que el punto $(2,-16)$ es un punto de inflexión.

b) Para $a=1$, $b=1$ y $c=0$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=-2$.

4. Dada la función

$$f(x)=\frac{4x-6}{x-2}$$

a) Estudie la continuidad de f y calcule su función derivada f'.

b) Razone si existen o no extremos relativos de la función f.

c) Calcule las asíntotas de la función.

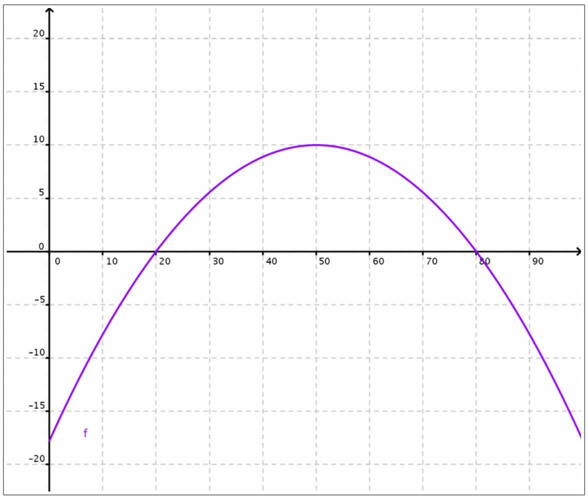
Autoevaluación

1.

a) La gráfica será una parábola con vértice en

$$x_V=\frac{-100}{-2}=50$$

Con una tabla de valores adecuada obtenemos:



b) No hay pérdidas cuando $f>0$. Ello ocurre cuando la gráfica está por encima del eje **X**. Apreciamos claramente que ello es así cuando las unidades están comprendidas entre 20 y 80.

c) El mayor beneficio posible se corresponde con el punto máximo de la función, que en este caso es el vértice de la parábola.

El beneficio máximo es de 10 000 € y se obtiene cuando se fabrican 50 unidades.

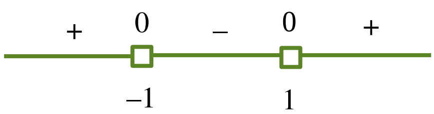
2. Tenemos $g(x)=x^3-3x$

a) Cortes con los ejes:

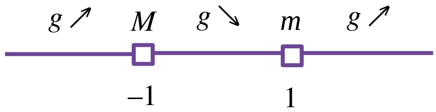
Y: $x=0 \rightarrow y=0$

X: $y=0 \rightarrow x(x^2-3)=0 \rightarrow x=0,\pm\sqrt{3}$

b) Para determinar los extremos calculamos la derivada $g'(x)=3x^2-3$ y estudiamos su signo:



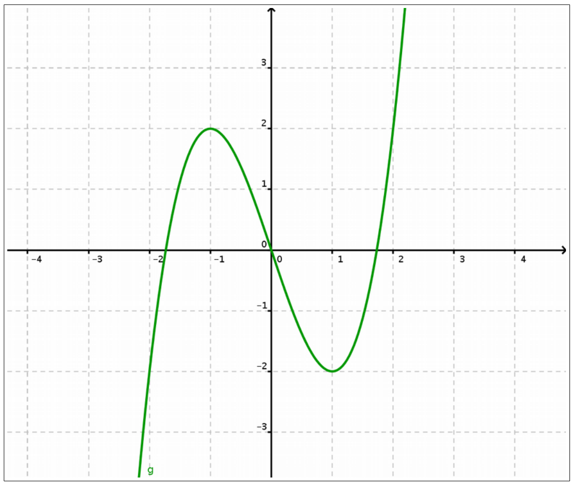
De ahí deducimos:



mímimo: $m=(1,-2)$

Máximo: $M=(-1,2)$

Con una tablita de valores:



3. Primero, derivemos dos veces la función:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \xrightarrow{D} f''(x)=6ax+2b$$

Traducimos:

Para $x=0$ hay un extremo:

si $x=0$ es $y'=0 \rightarrow c=0$

Pasa por el punto $(2,-16)$:

si $x=2$ es $y=-16 \rightarrow 8a+4b+2c=-16$

Para $x=2$ hay una inflexión:

si $x=2$ es $y''=0 \rightarrow 12a+2b=0$

Reuniéndolo todo y resolviendo el sistema correspondiente obtenemos:

$$a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=0$$

Tangente para $a=1$, $b=1$ y $c=0$:

Punto: $x_0=-2 \rightarrow y_0=-4$

Pendiente: $m=f'(-2)=8$

Ecuación: $y-(-4)=8\cdot(x+2)$

Simplificando: $y=8x+12$

4. Dada la función

$$f(x)=\frac{4x-6}{x-2}$$

a) La función sólo es discontinua para $x=2$ (cero del denominador). Tenemos:

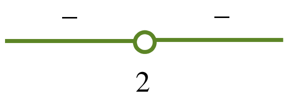
Valor: si $x=2$ es $y=$ No existe

Tendencias: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\left[\frac{2}{0}\right]=\pm\infty$

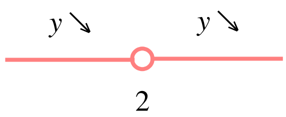
Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito $x = 2$.
En cuanto a la derivada:

$$f'(x)=\frac{4\cdot(x-2)-1\cdot(4x-6)}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)^2}$$

b) Es fácil observar que la derivada siempre es negativa:



Por ello, la monotonía de la función:



De ahí deducimos de ahí que la función no tiene extremos relativos.

c) De lo visto en el apartado (a) deducimos que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Calculemos ahora la tendencia en el infinito. Al ser un cociente de polinomios es útil la regla de los grados:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{4}{1}=1$$

De ahí deducimos que la recta y = 1 es una asíntota horizontal.