TEMA 3

PROGRAMACIÓN LINEAL

Contenidos

1. Inecuaciones lineales.
2. Sistemas de inecuaciones lineales.
3. Ejercicios de programación lineal.
4. Resolución de un ejercicio de programación lineal.
5. Problemas con planteamiento.
6. Interpretación geométrica

Tiempo estimado

12 sesiones

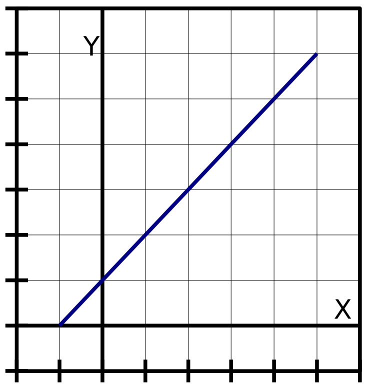
Criterios de Evaluación

7. Interpreta en el plano las soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas y usar el vocabulario adecuado.
8. Conoce los conceptos y propiedades necesarios para operar correctamente con desigualdades.
9. Resuelve sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Determinar los vértices del recinto y dibujarlo.
10. Conoce la terminología básica de la programación lineal.
11. Resuelve problemas de programación lineal de dos variables, procedentes de diversos ámbitos, pro métodos analíticos y gráficos.

1. Inecuaciones lineales

Para poder resolver problemas de programación lineal bidimensionales necesitamos conocer a fondo las inecuaciones lineales con dos incógnitas.

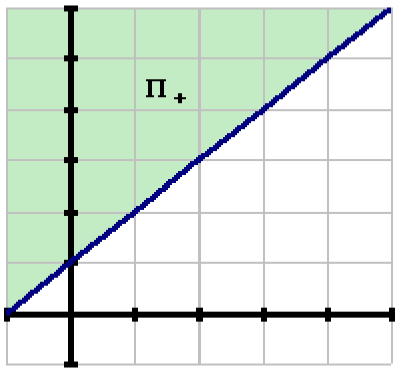
Partamos de la ecuación $y = x + 1$. Sabemos que si representamos todas sus soluciones obtenemos una recta: la recta r dibujada a la derecha.



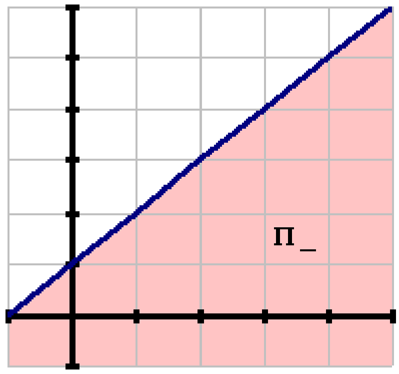
¿Qué significado geométrico tendrá la inecuación $y > x + 1$?

Como la x mide la posición “izquierda-derecha” y la “y” nos indica “abajo-arriba”, la inecuación $y > x + 1$ tendrá como solución todos los puntos situados “por encima” de la recta. Y análogamente, la inecuación $y < x + 1$ tiene como solución todos los puntos del semiplano inferior.

Si la desigualdad no es estricta ($\leq$, $\geq$) el borde estará incluido:

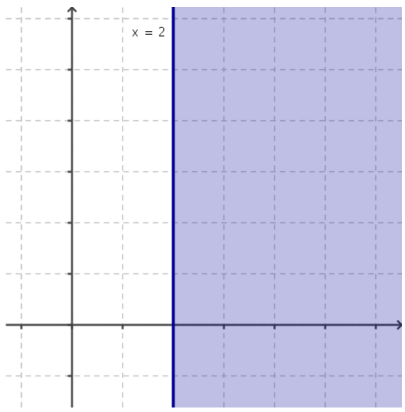


$y \geq x + 1$



$y \leq x + 1$

Otro ejemplo: ¿cuál es el conjunto de los puntos del plano que verifican la desigualdad $x \geq 2$? Observemos que se trata de los puntos cuya abscisa es mayor o igual que 2: se trata de todos los puntos que están a la derecha de la recta vertical $x = 2$.



En general:

> La solución de una inecuación de dos incógnitas $ax + by + c \geq 0$ es un semiplano determinado por la recta $ax + by + c = 0$, incluida ésta.

A una inecuación lineal también se la denomina restricción.

Para resolver $Ax + By + C \geq 0$:

1) Despejamos la y o la x.

2) La y señala arriba (>) o abajo (<) y la x izquierda (<) o derecha (>).

☞ Ejemplos:

$x + 2y - 3 \leq 0 \rightarrow x \leq 3 - 2y \rightarrow$ semiplano izquierdo a $x = 3 - 2y$

$2x + y + 5 \leq 0 \rightarrow y \leq -5 - 2x \rightarrow$ semiplano inferior a $y = -5 - 2x$

$-x + y + 4 \geq 0 \rightarrow y \geq x - 4 \rightarrow$ semiplano superior a $y = x - 4$

$y + 4 \geq 0 \rightarrow y \geq -4 \rightarrow$ semiplano superior a $y = -4$

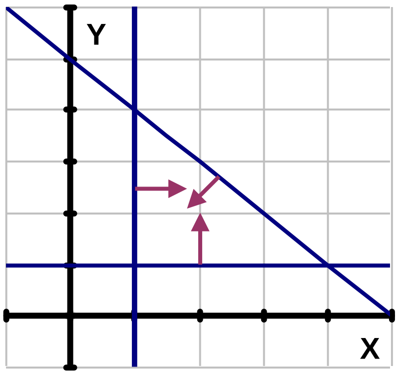
$x - 5y + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 5y - 2 \rightarrow$ semiplano derecho a $x = 5y - 2$

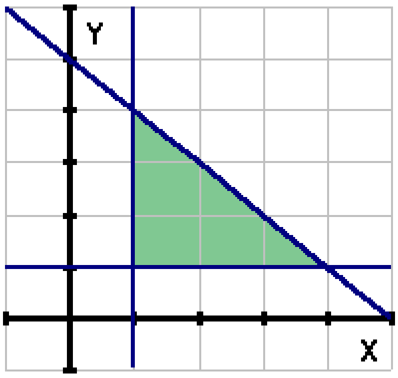
2. Sistemas de inecuaciones

Veamos cómo proceder partiendo de un caso concreto:

Ejemplo 1: resolvamos el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$





Resolver ese sistema es obtener el conjunto de puntos $(x\,,y)$ del plano que cumplen las tres desigualdades anteriores.

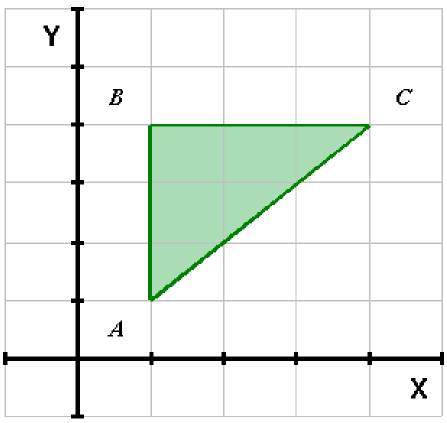
Observemos cómo traducir las desigualdades:

$x \geq 1$	semiplano derecho determinado por la recta	$x = 1$
$y \geq 1$	semiplano superior determinado por la recta	$y = 1$
$y \leq 5 - x$	semiplano inferior determinado por la recta	$y = 5 - x$

Ahora representamos esos semiplanos y observamos qué puntos están en los tres a la vez; esto es, los puntos comunes a todos los semiplanos.

En la imagen de la derecha apreciamos que la solución del sistema es el recinto señalado: un triángulo. ¿Sabrías decir cuáles son sus vértices?

Ejemplo 2: Vamos ahora a resolver el problema recíproco: determinar un sistema de inecuaciones cuya solución sea el siguiente recinto del plano:



Hemos dispuesto todos los pasos en una sencilla tabla:

Lado	***Ecuación***	***Semiplano***	***Inecuación***
AB	$x = 1$	Derecho	$x \geq 1$
BC	$y = 4$	Inferior	$y \leq 4$
AC	$y = x$	Superior	$y \geq x$

El recinto es el determinado por el conjunto de restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 4 \\ y \geq x \end{cases}$$

3. Ejercicios de programación lineal.

Enunciado.

En un problema de **programación lineal** nos encontraremos un conjunto de inecuaciones lineales (que se denominan normalmente **restricciones**):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \quad \dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

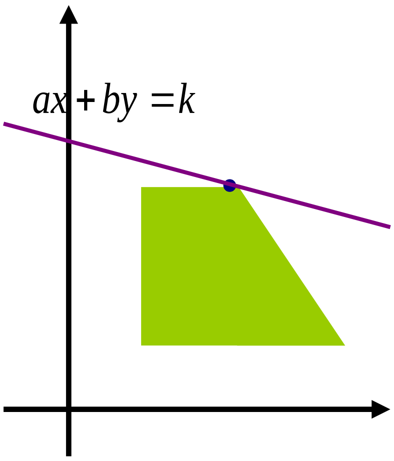
Los puntos que satisfacen todas las desigualdades forman un recinto convexo del plano. Dicha región se denomina **región factible o de validez**, y a cada uno de sus puntos se les llama **soluciones factibles**.

Y nos encontraremos una fórmula con dos variables

$$f(x, y) = ax + by + c$$

que tenemos que **optimizar** (maximizar o minimizar) en el recinto factible.

El punto (o puntos) en el que la función objetivo se optimice se denomina **solución óptima**.



Idea intuitiva sencilla: imagina una zona de tu localidad limitada por unos caminos o carreteras rectas y que estudiamos en qué lugar la temperatura ha sido la más alta o la más baja.

Esa zona es la región factible que dibujamos al resolver las inecuaciones (desigualdades). Y la temperatura es la función objetivo: a cada punto le asocia la temperatura que hace en él. Se trata de averiguar en qué lugar o lugares las temperatura es máxima o mínima.

Existencia de soluciones.

Hay infinidad de puntos en una región. ¿Cómo vamos a saber en cuál se alcanza el máximo o mínimo? ¿Probando en todos ellos? Noooo. Tranquilidad. El siguiente resultado es de enorme ayuda:

> Dada una función lineal $f(x, y) = ax + by + c$ y una región $\mathscr{R}$ que es un polígono convexo acotado:
>
> 1. La función f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $\mathscr{R}$.
> 2. Esos valores extremos se alcanzan algunos de sus vértices.

¡Así sólo tenemos que probar en los vértices para encontrar la solución!

Número de soluciones.

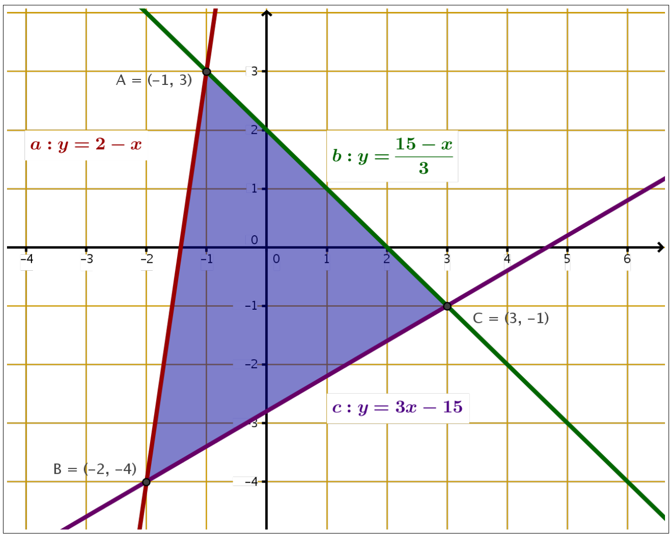
La mayoría de los problemas tienen solución única. Pero no es así en todos los casos. Como veremos, en algunos casos hay hasta infinitas soluciones.

4. Un ejercicio de programación lineal.

<u>EJEMPLO 1</u>: Obtengamos el valor máximo de la función $f(x\,,y)=2x+3y$ en el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$7x-y\geq -10 \quad , \quad x+y\leq 2 \quad , \quad 3x-5y\leq 15$$

Representamos el recinto. Apreciamos las coordenadas de los vértices:



Como f es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza sus valores extremos en los vértices.

Vértices		***Función***
$A\,(-1\,,3)$	➡	$f(-1,3)=2\cdot(-1)+3\cdot 3=7$
$B\,(-2\,,-4)$	➡	$f(-2,-4)=2\cdot(-2)+3\cdot(-4)=-16$
$C\,(3\,,-1)$	➡	$f(3,-1)=2\cdot 3+3\cdot(-1)=3$

El valor máximo de f en el recinto es 7 y se alcanza en el vértice A.

<u>EJEMPLO 2</u>: Obtengamos los valores extremos de $F(x\,,y)=-3x+4y+15$ en el polígono convexo de vértices $A\,(-2\,,1)$, $B\,(-2\,,6)$, $C\,(2\,,6)$, $D\,(2\,,4)$.

Como f es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza sus valores extremos en los vértices.

Vértices		***Función***
$A\,(-2\,,1)$	➡	$F=-3\cdot(-2)+4\cdot 6+15=25$
$B\,(-2\,,6)$	➡	$F=-3\cdot(-2)+4\cdot 6+15=45$
$C\,(2\,,6)$	➡	$F=-3\cdot 2+4\cdot 6+15=33$
$D\,(2\,,4)$	➡	$F=-3\cdot 2+4\cdot 4+15=25$

ATENCIÓN: se alcanza el valor mínimo en dos vértices. Podemos observar que dicho valor mínimo se alcanza en todos los puntos del lado que une dichos vértices.

Es $\min\limits_R f=25$ y se alcanza en cada punto del lado $\overline{AD}$, y $\max\limits_R f=45$ alcanzándose en el vértice B.

5. Planteamiento de un problema

Problema 1.

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La constructora dispone para ello de un máximo de 18 millones de euros, siendo el coste de cada tipo de casa 300.000 y 200.000 euros, respectivamente.

Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa tipo A es de 40.000 € y de 30.000 € por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Vamos a ver a través de dos ejemplos cómo son los problemas de optimización y cómo plantearlos, llegando a una expresión algebraica de ellos que permita aplicar métodos matemáticos que conduzcan a su resolución.

PLANTEAMIENTO

- Anotaremos esquemáticamente todos los datos:

Casas	***Gasto***	***Beneficio***	***¿Número?***
Tipo A	300000	40000	x
Tipo B	200000	30000	y

  - ✔ Límite para el gasto: 18 000 000
  - ✔ El beneficio obtenido debe ser máximo.
- Traducimos ahora todos esos datos y condiciones al lenguaje algebraico:
  - ✔ El beneficio (miles de euros) está en función del número de casas:

$$f = 40x + 30y$$

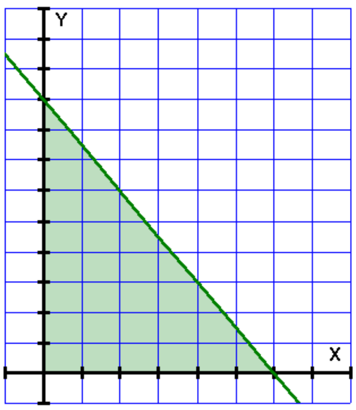
  - ✔ Las incógnitas x e y están sometidas a unas restricciones:

    No pueden ser cantidades negativas → $x \geq 0$, $y \geq 0$

    Es *gasto* ≤ 18000000 → $3x + 2y \leq 180$
- Concluimos:
  - ✔ **Objetivo**: maximizar $f = 40x + 30y$
  - ✔ **Restricciones**: $\{x \geq 0\,, y \geq 0\,, 3x + 2y \leq 180\}$

RESOLUCIÓN

Como la función objetivo es lineal y el recinto es un polígono convexo y acotado, los valores extremos se alcanzan en los vértices



En el margen está el recinto factible (escala 1:10) con *f* en miles.

Vértices		$f = 40x + 30y$
$P = (0\,,0)$	➡	$f = 40 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$
$Q = (60\,,0)$	➡	$f = 40 \cdot 60 + 30 \cdot 0 = 2400$
$R = (0\,,90)$	➡	$f = 40 \cdot 0 + 30 \cdot 90 = 2700$

Tenemos así que *f* alcanza su valor máximo en R para $(x\,,y) = (0\,,90)$.

CONCLUSIÓN

Para obtener el máximo beneficio deben construirse 90 casas tipo B y ninguna del tipo A.

José Álvarez Fajardo

❑ Problema 2.

Una agencia de viajes tiene 10 autobuses y de 50 plazas y 20 microbuses de 30 plazas. Ha de programar un viaje para 400 personas y el día que quieren salir dispone de 10 conductores como máximo. Cuando se utiliza un autobús el presupuesto de gasto es de 600 euros, mientras que en el caso del microbús es de 450 euros.

¿Cuántos vehículos deben utilizar de cada clase para que el gasto sea mínimo?

- Anotaremos esquemáticamente todos los datos:
  - ✔ Características de los vehículos:

Vehículos	***Hay***	***Plazas***	***Gasto***	***¿Número?***
Autobuses	10	50	600	x
Microbuses	20	30	450	y

  - ✔ El número de conductores es, a lo sumo 10.
  - ✔ El número de plazas debe ser al menos 400.
  - ✔ El gasto ocasionado debe ser mínimo.
- Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:
  - ✔ El gasto está en función del nº de vehículos (x e y) que se utilizan:

$$f = 600x + 450y$$

  - ✔ Las incógnitas x e y no pueden tomar valores cualesquiera: están sometidas a unas restricciones:

    El nº de autobuses no puede ser negativo ni puede superar a 10:

$$0 \leq x \leq 10$$

    El nº de microbuses no puede ser negativo ni puede superar a 20:

$$0 \leq y \leq 20$$

    Como hay un máximo de 10 conductores, la cantidad total de vehículos usados será, como máximo, 10:

$$x + y \leq 10$$

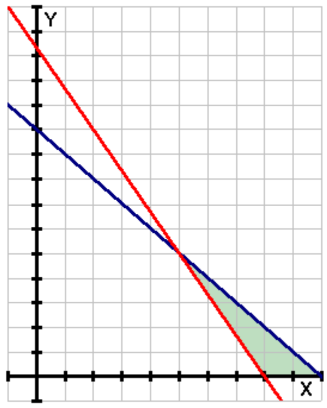
    El nº de plazas que se consiguen deber ser de 400 como mínimo:

$$50x + 30y \geq 400$$

- Concluimos:
  - ✔ **Objetivo**: minimizar $f = 600x + 450y$
  - ✔ **Restricciones**:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 20 \\ x + y \leq 10 \\ 50x + 30y \geq 400 \end{cases}$$

En el margen hemos observamos el triángulo R que es la solución del sistema de inecuaciones anterior. Como la función objetivo es lineal y el recinto es un polígono convexo y acotado, la solución se alcanza en alguno de sus vértices:



Vértices		$f = 600x + 450y$
$P = (5\,,5)$	➡	$f = 600 \cdot 5 + 450 \cdot 5 = 5250$
$Q = (8\,,0)$	➡	$f = 600 \cdot 8 + 450 \cdot 8 = 4800$
$R = (10\,,0)$	➡	$f = 600 \cdot 10 + 450 \cdot 0 = 6000$

Tenemos así que f alcanza su valor mínimo en R para $(x\,,y) = (8\,,0)$.

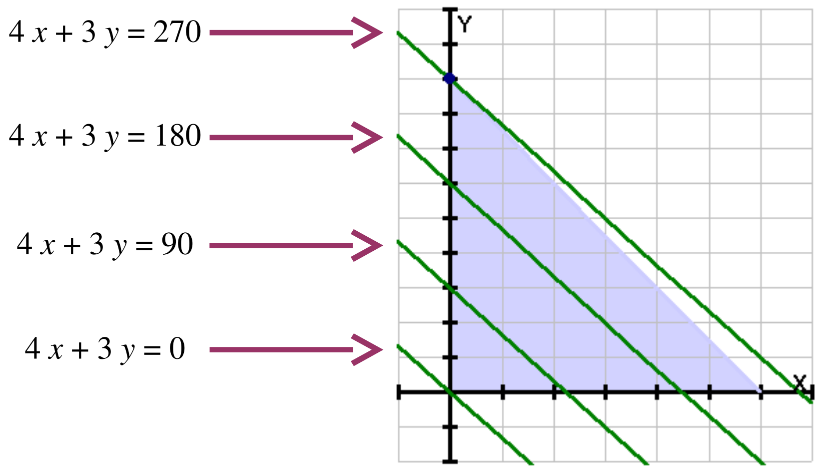
CONCLUSIÓN

Para minimizar el gasto deben usarse ocho autobuses y ningún microbús.

6. Interpretación geométrica

También puede resolverse e interpretarse la solución de modo gráfico. Para ello representamos sobre el conjunto solución rectas de la forma $f\,(x\,,y) = k$, donde f es la función objetivo.

Concretemos: veamos cómo puede interpretarse de forma gráfica la función objetivo a través del problema 1, donde la función objetivo es $f = 4x + 3y$:



Fijémonos que en este problema:
- Todas las rectas f(x,y)= k son paralelas.
- Cuanto mayor es k mayor valor toma la función objetivo.

Observa la traducción:

<u>Geométrico</u>	<u>Analítico</u>
$4x + 3y = 0$ pasa por $(0\,,0)$	En $(0\,,0)$ el beneficio es 0
$4x + 3y = 90$ pasa por $(0\,,30)$	En $(0\,,30)$ el beneficio es 90
$4x + 3y = 180$ pasa por $(30\,,20)$	En $(30\,,20)$ el beneficio es 180
$4x + 3y = 270$ pasa por $(0\,,90)$	En $(0\,,90)$ el beneficio es 270
$4x + 3y = k$ pasa por P	En P el beneficio es k

El beneficio máximo se alcanzará sobre una recta $4x + 3y = k$ en la que sea k lo mayor posible y que pase por algunos de los puntos de la región determinada por las restricciones.

Esto sugiere un método geométrico para encontrar esa solución:

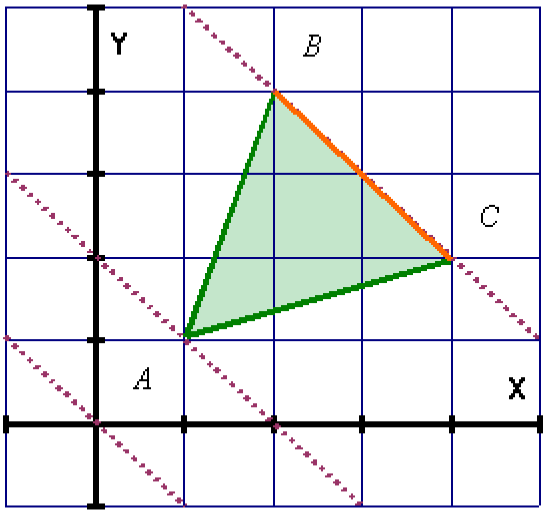
- ✔ Dibujar la recta $4x + 3y = 0$
- ✔ Trazar la paralela a ella que proporcione el valor más alto

Encuentra tú la solución del problema 2 siguiendo el método geométrico sugerido.

❑ Interpretación del número de soluciones.

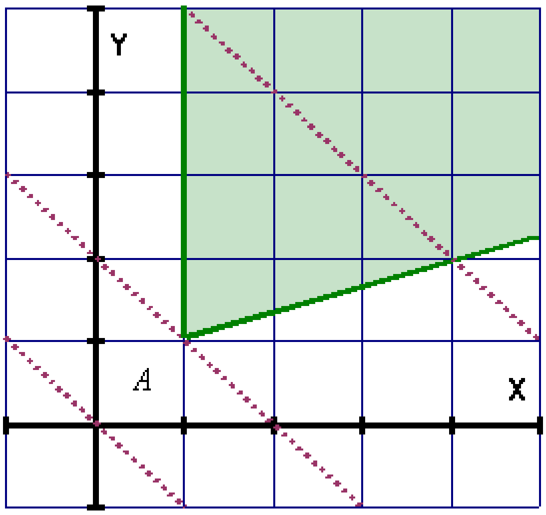
Veremos a continuación de forma gráfica por qué un problema de programación lineal puede tener una solución, varias, ninguna o infinitas.

Consideremos el conjunto factible siguiente, en el que se ha representado la recta $z = 0$, donde z es la función objetivo:



$z = M$

$z = 0$ $z = m$



$z = k$

$z = 0$ $z = m$

☞ <u>Ejemplo 1</u>:

- z alcanza su valor mínimo $z = m$ en el vértice $A = (1, 1)$.
- z alcanza su valor máximo $z = M$ en todos los puntos de $\overline{BC}$.

☞ <u>Ejemplo 2</u>:

- z alcanza su valor mínimo $z = m$ en el vértice $A = (1, 1)$.
- Al no estar acotado el recinto, z no alcanza nunca ningún valor máximo.

IMPORTANTE:
Si z sólo pudiera tomar valores enteros, habría exactamente tres puntos en los que alcanzaría su valor máximo:
B, C , (3 , 3)

Observemos que el recinto de la derecha es convexo, pero no es acotado.
No hay un valor máximo, pero sí hay mínimo, que se alcanza en un vértice.

Ejercicios

1. [S/97] En un problema de programación lineal la región factible es el pentágono convexo que tiene de vértices los puntos cuyas coordenadas son

$$P\,(0\,,0)\ ,\ Q\,(0\,,4)\ ,\ R\left(\frac{5}{2}\,,2\right)\ ,\ S\left(\frac{11}{4}\,,0\right)$$

y la función objetivo que hay que maximizar es $F\,(x\,,y) = 2x + a\,y$ (a es un número real positivo).

a) Dibuja la región factible.

b) Halla el punto del mismo en el que la función objetivo alcanza el máximo para $a = \dfrac{1}{2}$.

c) Encuentra el valor de a para que el máximo se alcance en el punto Q.

2. [S/98] Para abonar una parcela agrícola se necesitan, por lo menos, 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo.

Se dispone de un producto A cuyo precio es de 30 Pta./Kg. y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y un 20% de fósforo y cuyo precio es de 40 Pta./Kg.

¿Qué cantidad se debe tomar de A y de B para abonar la parcela con el menor costo posible sabiendo que, como máximo se pueden llevar a la parcela 60 Kg. de producto?

3. [S/98] En un almacén caben, a lo sumo, 60 contenedores. Para atender las demandas, el almacén debe disponer en cualquier momento de un mínimo de 30 contenedores de zumos y 20 de leche.

Almacenar un contenedor de zumo conlleva un gasto de 40 pts. mientras que el de uno de leche asciende a 80 pts.

Determine con qué número de contenedores de zumo y de leche se alcanza un gasto de almacenaje óptimo.

4. [S/00]

a) El triángulo limitado por las rectas

$$2x = 7\ ,\ 5y - 4x = 11\ ,\ 2x + 5y = 17$$

representa la solución de cierto sistema de inecuaciones lineales. Determine ese sistema de inecuaciones

b) Calcule los puntos del recinto anterior en los que la función $F\,(x\,,y) = 2x + 7y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

c) Encuentre dichos valores máximo y mínimo.

5. [S/01] Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4 millones de pts y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 1 millón de pts y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje.

¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

6. [S/02] Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20 euros; para fabricar una librería de 3 estanterías se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es de 35 euros.

Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante ni tampoco más de 70 de 3 estantes.

7. [S/02] Una persona desea adelgazar. En la farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para que tome una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes condiciones:

No debe tomar más de 150 g de mezcla, ni menos de 50 g.

La cantidad de A será mayor o igual que la de B.

No debe incluir más de 100 g del compuesto A.

Se sabe que cada 100 g de A contienen 30 mg de vitaminas y cada 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas.

a) Formule matemáticamente el conjunto de restricciones, dibuje la región factible y determine sus vértices.

b) ¿Cuántos gramos debe tomar de cada compuesto para obtener el preparado más rico en vitaminas?

8. [S/02] Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches. La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricas los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y proporciona un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y proporciona un beneficio de 15 euros.

Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

9. [S/02] Consideremos el sistema formado por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\leq 120\ ,\ \ 3y\leq x\ ,\ x\leq 100\ ,\ y\geq 10$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) ¿En qué punto, o puntos, de esa región la función $F(x,y)=25x+20y$ alcanza el máximo?

10. [S/02] Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A ó B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, debe doblar al menos a la inversión en fondos B.

La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2.7% y la de los B ha sido del 6.3%.

Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtendría el máximo beneficio y calcúlelo.

11. [S/02] Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón.

Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es de 1,75 €, y por cada tableta de turrón es de 1 €.

¿Cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

12. [S/03] Dado el sistema de inecuaciones

$$-5x+3y\leq 2\ ,\ \ -x+6y\geq 6\ ,\ 2x+3y\leq 37$$

a) Represente la solución y determine sus vértices.

b) Halle el punto del recinto en el que la función $F(x\,,y)=-2x+5y$ alcanza su máximo.

13. [S/03] Una empresa gana 150 euros por cada Tm de escayola producida y 100 euros por cada Tm de yeso.

La producción debe ser como mínimo de 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso. La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola. El triple de la cantidad de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm.

Calcule la cantidad diaria que debe producirse de cada material para obtener la máxima ganancia, y determine dicha ganancia.

14. [S/03] Una empresa fabrica sofás de dos tipos, A y B, por los que obtiene un beneficio, por unidad, de 1500 y 2000 euros, respectivamente.

Al menos se deben fabricar 6 sofás del tipo A y 10 del tipo B, por semana, y además el número de los del tipo A no debe superar en más de 6 unidades al número de los del B.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar semanalmente para obtener beneficio máximo, si no se pueden fabricar más de 30 sofás semanalmente?

15. [S/03]

a) Dibuje la región delimitada por las siguientes inecuaciones, determinando sus vértices:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geq 1\quad ,\quad y\leq x\quad ,\quad x\leq 2$$

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=-x+2y-2$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

16. [S/03]

a) Represente la región delimitada por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x+2y\geq 80\quad ,\quad 3x+2y\geq 160\quad ,\quad x+y\leq 70$$

b) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=9x+8y-5$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

17. [S/03] Una piscifactoría vende gambas y langostinos a 10 y 15 euros el kg, respectivamente. La producción máxima mensual es una tonelada de cada producto y la producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno. Si la producción total es, a lo sumo, de 1700 kg al mes, ¿cuál es la producción que maximiza los ingresos mensuales? Calcule estos ingresos máximos.

18.[S/04]

a) Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y\geq -13 \\ 2x+3y\geq 17 \\ x+y\leq 11 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

b) Determine los vértices de este recinto

c) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=5x+6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

19.[S/04] Sea el sistema de inecuaciones

$$x+y\leq 6\ ,\ x-2y\leq 13\ ,\ x+3y\geq -3\ ,\ x\geq 0$$

a) Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices.

b) Halle los puntos del recinto en los que la función $F(x,y)=x-2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos.

20.[S/04] Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=3x+5y$ en el recinto del plano determinado por las inecuaciones

$$\begin{cases} 3x-2y\geq 10 \\ 2x+3y\leq 24 \\ x-5y\geq -1 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

21.[S/04] Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál será dicho ingreso?

22.[S/04] Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas.

Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3 euros la unidad.

En un día la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos, y calcule dichos ingresos.

23.[S/04]

a) Los vértices de un polígono convexo P son

$$(1,1)\ ,\ (3,\frac{1}{2})\ ,\ (\frac{8}{3},\frac{5}{2})\ ,\ (\frac{7}{3},3)\ \text{y}\ (0,\frac{5}{3})$$

Calcule el máximo de la función objetivo en P:

$$F(x,y)=x-2y$$

b) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones siguientes y determine sus vértices:

$$\begin{cases} x+2y\geq 6 \\ x-y\leq 1 \\ y\leq 5 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

24.[S/18] La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28.

Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener un beneficio económico máximo?

25.[S/18] Una joyería elabora dos tipos de collares a partir de perlas blancas, grises y negras. Para un collar de tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 negras, mientras que para un collar del tipo B, 10 perlas blancas, 20 grises y 60 negras. Se dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, mientras que es necesario que se utilicen al menos 1800 perlas negras.

Sabiendo que cada collar del tipo A le supone a la joyería un beneficio de 600 euros y cada collar del tipo B, 500 euros, calcule cuál debe ser la producción para obtener el máximo beneficio, así como a cuánto asciende el mismo. ¿Es posible fabricar 40 collares del tipo A y 20 del tipo B?

26.[S/18] Se considera la región definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x - y \geq 2\,, -x + 2y \leq 2\,, 3x + y \leq 15\,, y \geq 0$$

a) [1,8] Represéntela gráficamente y determine sus vértices.

b) [0,2] Indique razonadamente si el punto $(3\,,3)$ pertenece a dicha región.

c) [0,5] ¿En qué puntos de la región anterior la función $F\,(x, y) = 3x - 2$ y alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son éstos?

27.[S/18] Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A. Calcule cuántas palas de cada modelo tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo y determine su importe.

¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

28. [S/18]

a) [1] Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar:

"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0.50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0.25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

b) [1,5] Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0\;,\; x \leq 2y + 2\;,\; x + y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F\,(x\,, y) = 4x + 3$ y en ese recinto, así como el punto donde se alcanza.

29. [S/18] Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 11 \\ x \geq 2y - 5 \\ 3x + y \leq 18 \\ x \geq 0\;,\; y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) Halle los puntos de esa región en los que la función $F\,(x\,, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

c) Justifique si el punto $(5.5\,, 2)$ pertenece a la región factible.

30.[S/19] Se quiere elaborar dos suplementos alimenticios UNAL y DOSAL con idea de completar la dieta de ciertos individuos. Cada comprimido de UNAL aporta 5 unidades de calcio, 5 de proteínas y 1 caloría y tiene un coste 0.6 euros, mientras que un comprimido de DOSAL aporta 2 unidades de calcio, 5 de proteínas y 3 calorías, siendo su coste de 1 euro.

Sabiendo que los mínimos diarios requeridos son 10 unidades de calcio, 20 de proteínas y 6 calorías, encuentre la combinación de comprimidos de los dos suplementos que satisfacen las necesidades diarias con el menor coste.

31.[S/19] Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$$7y \leq 15 + 3x\;,\; y \geq x - 3\;,\; 3y \geq -x + 11$$

a) Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función $H\,(x\,, y) = 4x - y - 16$ restringida al anterior recinto y obtenga dichos valores.

32.[S/19] Una granja elabora una dieta mezclando dos tipos de pienso A y B. El pienso A aporta 2 unidades de Calcio (Ca) y 1 de Hierro (Fe) por cada kilogramo, mientras que el B aporta 1 de Ca y 2 de Fe. El coste por kilogramo tanto del pienso A como del pienso B es 1 euro por kilogramo. La dieta deberá aportar al menos 2 unidades de Ca y 2 de Fe.

Determine los kilos que se han de mezclar de cada tipo de pienso para que el coste de la dieta sea mínimo. ¿Cuál sería dicho coste? ¿Cuántas unidades de Fe y de Ca se administrarían en este caso?

José Álvarez Fajardo

33.[S/19] Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

34.[S/19] Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

35.[S/20]

a) Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$\begin{cases} x+2y \leq 13 \\ x-y \leq 4 \\ x-2y \geq -7 \\ x+y \geq 5 \end{cases}$$

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x\,,y) = x+y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

36.[S/20] Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros. Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma?

¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

37.[S/20] Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1 200 y 1 500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

38.[S/20] Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra . Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 terrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate. Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1.5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja . Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigüe qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

39.[S/20] Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate. Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue. Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

40.[S/20] Se considera la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 4 \ , \ x - y \geq -2 \ , \ x + 3y \geq 2 \ , \ y \leq 2$$

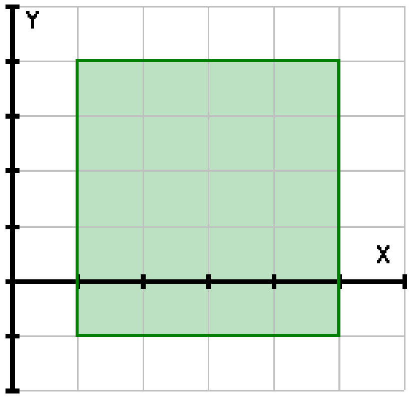
a) Represéntela gráficamente y determine sus vértices.

b) Indique razonadamente si el punto $(4\,,-0.75)$ pertenece a dicha región.

c) ¿En qué puntos de la región anterior la función $F\,(x\,,y) = x + y$ alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son estos valores?

Cuestiones

1. Determina un sistema de inecuaciones que determinen el rectángulo de la figura:



2. Sin representar ninguna gráfica, ¿cómo averiguar si el punto $P(2,3)$ pertenece al semiplano determinado por $2x-y\geq 4$?

3. Representa el semiplano determinado por las inecuaciones siguientes:

a) $x \geq -2$

b) $y \leq 4$

4. Dado el semiplano $2x+3y\leq 5$, escribe las coordenadas de dos puntos que pertenezcan y de dos que no a él.

5. En un problema de programación lineal, ¿cómo se llama a la función que debe optimizarse?

6. Al representar las restricciones de un problema observamos que no hay ningún punto que las cumpla todas. ¿Cuál es la solución del problema?

7. ¿Qué es una solución factible en un problema de programación lineal?

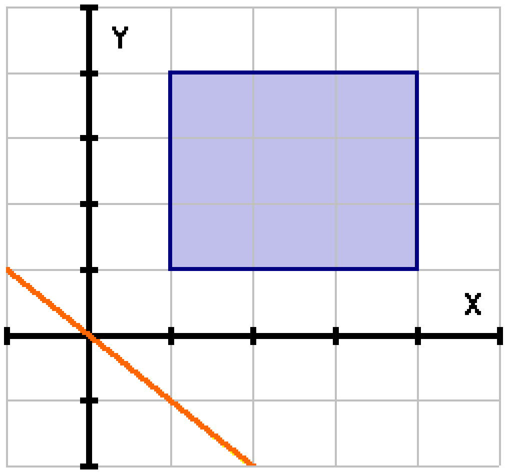
8. Pon un ejemplo de un problema de programación lineal sin soluciones factibles.

9. ¿Puede un problema de programación lineal tener infinitas soluciones óptimas? ¿Y ninguna?

10. Explica en qué situación un problema de programación lineal puede alcanzar su valor óptimo en un punto interior de la región factible.

11. ¿Puede una función objetivo representarse por una recta vertical? ¿Y por una horizontal?

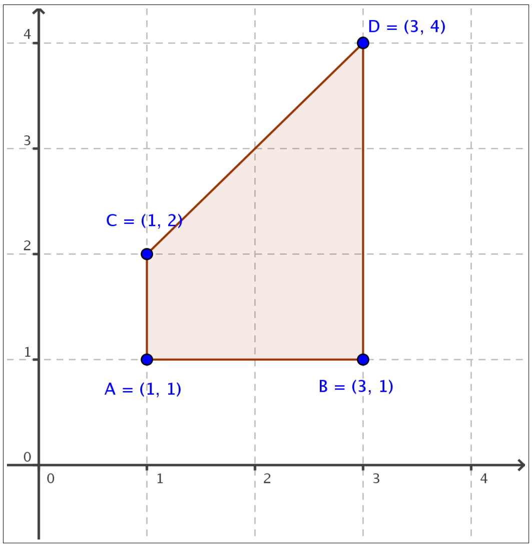
12. En la figura tienes la gráfica correspondiente a un problema de programación lineal. Resuélvelo:



$z = 0$

Autoevaluación

1. Construye un sistema de inecuaciones cuyo conjunto solución corresponda con el señalado en la figura adjunta (incluyendo los bordes):



2. Halla

$$z_1 = max\{12x + 4y\} \quad \text{y} \quad z_2 = min\{12x + 4y\}$$

siendo x e y variables sujetas a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \\ y \leq 4 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

3. Una empresa multinacional tiene dos refinerías de petróleo: la refinería A produce diariamente una tonelada de gasolina normal, dos de gasolina súper y cuatro de gasolina sin plomo; la refinería B produce diariamente dos toneladas de cada una de las tres clases de gasolinas.

La empresa necesita para su funcionamiento al menos 70 toneladas de gasolina normal, 130 de gasolina súper y 150 de gasolina sin plomo. Los gastos diarios de la refinería A ascienden a 1500 euros y a 2000 los de la B.

¿Cuántos días deberían trabajar cada refinería para obtener la gasolina que la empresa necesita con un coste mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

4. Un almacenes desean comprar dos tipos de electrodomésticos, A y B. Cada unidad del tipo A cuesta 600 euros y cada unidad de B cuesta 1.000 euros. Dispone de 14.000 euros para la compra y de espacio en su almacén para un máximo de 20 electrodomésticos.

Sabiendo que su beneficio por unidad es del 20% del precio de compra, ¿cuántos electrodomésticos ha de combinar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Autoevaluación

1.

Primero obtendremos las ecuaciones de sus lados:

AC: $x = 1$

BD: $x = 3$

AB: $y = 1$

CD: $\left.\begin{matrix} m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2}{2}=1 \\ P=(1,2) \end{matrix}\right\} \rightarrow y=2+1\cdot(x-1)=x+1$

Ahora veamos los semiplanos:

Semiplano derecho de $x = 1$ $(x \geq 1)$

Semiplano izquierdo de $x = 3$ $(x \leq 3)$

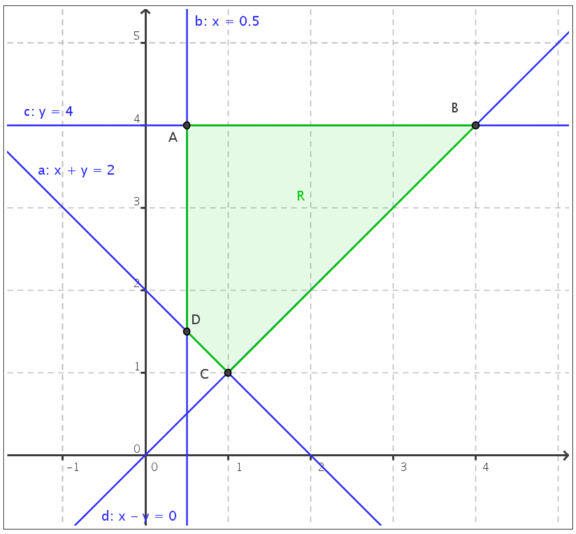
Semiplano superior de $y = 1$ $(y \geq 1)$

Semiplano inferior de $y = x + 1$ $(y \leq x + 1)$

El recinto es el determinado por el conjunto de restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 3 \\ y\geq 5 \\ y\leq x+1 \end{cases}$$

2. Aquí hemos representado la solución del sistema de inecuaciones. Se trata de un cuadrilátero R :



Observemos ahora que al ser $z=12x+4y$ una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{matrix} (x,y)=(0{,}5,4) & \rightarrow & z=12\cdot 0{,}5+4\cdot 4=22 \\ (x,y)=(4,4) & \rightarrow & z=12\cdot 4+4\cdot 4=64 \\ (x,y)=(1,1) & \rightarrow & z=12\cdot 1+4\cdot 1=16 \\ (x,y)=(0{,}5,1{,}5) & \rightarrow & z=12\cdot 0{,}5+4\cdot 1{,}5=12 \end{matrix}$$

Tenemos que:

$z_{max}=64$ y se alcanza en $B=(4,4)$

$z_{min}=12$ y se alcanza en $D=(0{,}5,1{,}5)$

3. Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de las refinerías:

	N	*S*	*SP*	*coste*	*días*
A	1	2	4	1500	*x*
B	2	2	2	2000	*y*

- Las incógnitas x e y están sometidas a unas restricciones:
  - Al menos produciremos 70 Tm de Normal:

$$x+2y\geq 70$$

  - Al menos produciremos 130 Tm de Súper:

$$2x+2y\geq 130$$

  - Al menos necesitamos 150 Tm de Sin Plomo:

$$4x+2y\geq 150$$

  - Evidentemente, no pueden ser negativos:

$$x\geq 0\ ,\ y\geq 20$$

- El coste, que está en función del nº de días (x e y) trabaja cada refinería, debe ser mínimo:

$$f = 1500x + 200y$$

Concluimos:

- **Objetivo**: minimizar $f = 1500x + 200y$
- **Restricciones**: $\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ x+2y\geq 70 \\ 2x+2y\geq 130 \\ 4x+2y\geq 150 \end{cases}$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...

4. Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de los electrodomésticos:

	Coste	*Unidades*
A	600	*x*
B	1000	*y*

- El beneficio (en función del número de unidades (x e y) es el 20% del precio de compra y debe ser máximo:

$$f = 120x + 200y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:
  - El coste no puede superar los 14000 € de que disponemos:

$$600x + 1000y \leq 14000$$

  - El número de unidades no puede superar las 20 unidades que, como mucho, puedo almacenar:

$$x + y \leq 20$$

  - Evidentemente, no pueden ser negativos:

$$x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0$$

Concluimos:

- **Objetivo**: maximizar $f = 120x + 200y$
- **Restricciones**:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 600\,x + 1000\,y \leq 14000 \\ x + y \leq 20 \end{cases}$$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...