TEMA 2

MATRICES Y DETERMINANTES

Contenidos

1. Generalidades.
2. Suma de matrices y producto por un número.
3. Producto de matrices.
4. Matriz inversa.
5. Determinantes de segundo y de tercer orden.
6. Propiedades.
7. Determinantes y matriz inversa.
8. Sistemas de ecuaciones.
9. Determinantes de cualquier orden

Tiempo estimado

10 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conoce el vocabulario básico para el estudio de matrices: elemento, fila, columna, diagonal, etc.
2. Calcula sumas de matrices, productos de números por matrices.
3. Sabe cuándo es posible efectuar un producto de matrices y conocer la no conmutatividad.
4. Sabe qué es la matriz inversa y cómo calcularla.
5. Calcula el determinante de una matriz, desarrollando por los elementos de una línea.
6. Expresa matricialmente sistemas de ecuaciones lineales y los resuelve usando técnicas matriciales y los determinantes.

1.Generalidades

❑ Definición.

Consideremos la siguiente tabla de doble entrada, correspondiente a las existencias en los distintos almacenes de una cadena de electrodomésticos:

	Lavadoras	Frigoríficos	Hornos	Placas	Extractores
Almacén A	150	100	24	34	67
Almacén B	23	45	67	84	22
Almacén C	11	13	34	61	90
Almacén D	234	34	55	68	107

Observa que los datos se recogen en una tabla. En ella cada fila contiene las existencias de uno de los almacenes, y cada columna el número de unidades de cada uno de los productos.

Si asignamos a cada almacén un número (Almacén A = 1, Almacén B = 2, …), y acordamos un orden en los electrodomésticos (Lavadoras = 1, Frigoríficos = 2, …), toda la información de la tabla puede mostrarse de la siguiente forma, exclusivamente numérica:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 24 & 34 & 67 \\ 23 & 45 & 67 & 84 & 22 \\ 11 & 13 & 34 & 61 & 90 \\ 234 & 34 & 55 & 68 & 107 \end{pmatrix}$$

Una caja o tabla numérica como la anterior es denominada matriz.

Se las designa a través de una letra mayúscula; en nuestro caso es la matriz A.

En la matriz anterior, el elemento que ocupa la fila 2ª y la columna 3ª es $a_{23} = 67$. Esto significa que en el almacén B hay 67 hornos. ¿Cuál sería el elemento a_{45}? ¿Qué representa ese dato?

Como la tabla tiene 4 filas y 5 columnas, se dice que es una matriz de dimensiones 4×5.

☞ Ejemplo: Escribamos la matriz A de dimensiones 3×4 cuyos elementos se forman según la fórmula $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices son el medio ideal para organizar y estructurar la información, especialmente la que puede reducirse a números. Y más teniendo en cuenta que los datos se introducen y manipulan en los ordenadores a través de tablas, ya sea en Hojas de Cálculo ya sea en Bases de Datos.

Este tipo de tablas es el que vamos a estudiar en esta unidad. Comencemos con la definición y las notaciones:

- Una matriz es una tabla numérica de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Se dice que es una matriz de dimensiones $m \times n$, ya que tiene m filas y n columnas.
- Al elemento que ocupa la fila i y la columna j se le designa por

$$a_{ij}$$

- A la matriz se la designa mediante el símbolo

$$A = (a_{ij})_{m\,,n}$$

- Se designa por $\mathfrak{M}_{m\times n}$ al conjunto de las matrices de dimensiones $m \times n$.

Igualdad

Debemos tener muy claro cuándo diremos que dos matrices son iguales:

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y coinciden los términos que ocupan el mismo lugar en ambas:

$$A\,,B \in \mathfrak{M}_{m\times n} \;:\; A = B \overset{def}{\Longleftrightarrow} a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i\,,j$$

Matriz Traspuesta

La traspuesta de la matriz $A = (a_{ij})_{m\,,n}$ es la matriz $A^t = (a_{ji})_{n\,,m}$, que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

Observemos que si una matriz tiene dimensiones m x n, las dimensiones de su traspuesta son n x m .

☞ Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Algunos tipos de matrices.

Vamos a ver algunas matrices que por sus dimensiones o peculiares características reciben un nombre especial:

☞ **Matriz fila**:

Es aquella que tiene sólo una fila. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A una matriz fila también se la denomina "vector fila".

- **Matriz columna:**

  Es aquella que tiene sólo una columna. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A una matriz columna también se la denomina "vector columna".

- **Matriz nula:**

  Es aquella en la que todos sus elementos son cero.

- **Matriz cuadrada:**

  Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas. Si la matriz es de dimensiones $n \times n$ se dice que es de orden n.

  Una matriz cuadrada de orden 2 es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En una matriz cuadrada se llama diagonal a la serie formada por los elementos:
$a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}$

- **Matriz triangular:**

  Aquella en la que son ceros todos todos sus términos situados "a un lado" de la diagonal. Pueden distinguirse las triangulares superiores (son ceros los elementos situados bajo la diagonal principal) y las triangulares inferiores (son ceros los elementos situados sobre dicha diagonal)

Una matriz triangular superior es:
$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:**

  Es aquella matriz cuadrada en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal son nulos.

Una matriz diagonal es:
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalar:**

  Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal idénticos.

- **Matriz unidad o identidad:**

  La matriz identidad o unidad de orden n es la matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y todos los demás elementos son 0.

La matriz unidad de orden 3 es:
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:**

  Es aquella matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ en la tiene $a_{ij} = a_{ji}$. Observemos que en este caso es $A = A^t$.

Una matriz simétrica es:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2.Suma y producto por un número

❑ Suma de matrices.

Si A y B son dos matrices de dimensiones $m \times n$, su suma $A + B$ es otra matriz C de las mismas dimensiones con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Observa que sólo está definida la suma de matrices con iguales dimensiones.

- Ejemplo: es $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

La suma de matrices tiene las mismas que la suma numérica: es asociativa, conmutativa y la matriz nula es como el cero ($A+0=A$)

Y dada $A=(a_{ij})_{m,n}$ se dice que $-A=(-a_{ij})_{m,n}$ es su opuesta, porque al sumarlas se obtiene la matriz nula, claro.

Comprueba, a título de ejemplo, las propiedades con unas matrices.

❑ Resta de matrices.

Si A y B son dos matrices de dimensiones $m \times n$, su diferencia $A-B$ es otra matriz C de las mismas dimensiones con

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

Es fácil observar que
A – B = A + (–B)

❑ Producto por un número.

El producto del número real k por la matriz $A=(a_{ij})$ es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por dicho número:

$$kA=(ka_{ij})$$

☞ Ejemplo $3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 6 & 12\\ 3 & 9 & 0\end{pmatrix}$

$$2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & -10\\ -6 & 11\end{pmatrix}$$

Si $A\,,B\in\mathfrak{M}_{m\times n}\,,k\,,h\in\mathbb{R}$, es fácil comprobar las siguientes propiedades:

a) Distributivas: $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$ y

$(k+h)\cdot A=k\cdot A+h\cdot A$

b) Asociatividad mixta: $k\cdot(h\cdot A)=(kh)\cdot A$

c) Existencia de un elemento unidad: $1\cdot A=A$

Comprueba, a título de ejemplo, las propiedades con unas matrices.

3.Producto de matrices

❑ Definiciones.

Como introducción, vamos a resolver un sencillo problema: vamos a comprar 3 litros de leche a 0,60 cts, 2 kilo de carne a 5 euros y 4 kilos de naranjas a 0,75 cts. ¿Sabrías calcular el total? Seguro que sí.

Pero vamos a aprovechar y usar las matrices: vamos a colocar en una matriz fila los productos y en una columna (para distinguirlos) los costes unitarios:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\end{pmatrix}}_{P}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0.60\\ 5\\ 0.75\end{pmatrix}}_{U}\rightarrow P\cdot U=3\cdot 0.65+2\cdot 5+4\cdot 0.75$$

Atención: observa que debe haber el mismo número de elementos en ambas para poder calcular.

Así se multiplica una fila por una columna. Partiendo de esta idea introduciremos el producto de matrices:

Sea A una matriz $m \times p$ y B una matriz $p \times n$.

Su producto $A \cdot B$ es la matriz C de dimensiones $m \times n$ en la que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Importante: no está definido el producto de dos matrices cualesquiera: es preciso que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.
En este caso la matriz producto tiene tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

☞ Obtenemos el elemento que ocupa la fila i y la columna j del producto $A \cdot B$ se multiplica la fila i de A por la columna j de B ¡como antes!

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

☞ Ejemplo: Calculemos $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$ con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observemos las dimensiones de los factores y del producto:
a) (3x2) · (2x3) → (3x3)
b) (2x3) · (3x2) → (2x2)
c) (3x2) · (2x2) → (3x2)
d) (2x2) · (3x2) → No existe

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $C \cdot A =$ No definido

❑ No conmutatividad.

Vemos que el producto $A \cdot B$ puede ser distinto de $A \cdot B$. Incluso puede existir uno de ellos y el otro no.

Aunque existan A·B y B·A tengan iguales dimensiones pueden ser distintos.

Pero, cuidado: también puede ocurrir que sea $A \cdot B = B \cdot A$. En este caso se dice que las matrices conmutan.

☞ Ejemplo: Para obtener todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ponemos $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Debe ser:

$$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuando e igualando los términos obtenemos $c = 0$ y $b = 3d$. Así:

$$B = \begin{pmatrix} a & 3d \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad , \quad a, d \in \mathbb{R}$$

Tenemos así que hay infinitas matrices que conmutan con A.

❑ Propiedades.

Eso sí, el producto tiene las propiedades asociativas y distributivas (respecto de la suma), siempre y cuando puedan efectuarse las operaciones.

4.Matriz inversa.

En este epígrafe nos limitamos al conjunto de las matrices cuadradas de orden n, que recordemos se designa por $\mathfrak{M}_{n\times n}$.

Dos matrices cualesquiera de este conjunto pueden multiplicarse, siendo el resultado otra matriz de orden n. Tenemos de esta forma que el producto es una operación interna en $\mathfrak{M}_{n\times n}$.

❑ Elemento unidad.

Recordemos la matriz identidad o unidad:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En la matriz unidad los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y el resto de los elementos de la matriz son todos nulos.

Se denomina así porque se comporta como el 1 en el producto de números: si es A un matriz cuadrada de orden n:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

❑ Matriz inversa.

Seguro que sabes escribir un par de números inversos. ¿Cuál es su producto? Claro, dos números son inversos cuando su producto es uno. Por ello.

Sean A y B cuadradas de orden n. Se dice que B es inversa de A si

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Se demuestra que sólo dicha inversa es única y se escribe $B = A^{-1}$.

Se dice que una matriz cuadrada es inversible o regular cuando tiene una matriz inversa.
Se comprueba en ese caso que la inversa es única.

☞ Ejemplo: comprobemos que son inversas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Al multiplicarlas deberíamos obtener la matriz unidad:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot(-3) & 2\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Si A y B son cuadradas con
A · B = I
se demuestra que también es
B · A = I.

☞ Ejemplo: Todo número distinto de cero tiene inverso, pero no toda matriz $A \neq 0$ tiene inversa. Comprueba que no tiene inversa la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Sugerencia: multiplicamos por una matriz B cualquiera. El elemento de la primera fila y la primera columna resulta ser cero: ¡nunca obtendremos la matriz unidad!

5.Determinante de una matriz cuadrada

El determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene a partir de ella mediante una fórmula. Vamos a estudiar hasta el orden 3.

❑ Determinantes de orden 1.

El determinante de una matriz de orden 1 es el único número que la forma:

$$\det([\alpha]) = \alpha$$

❑ Determinantes de orden 2.

El determinante de una matriz de orden 2 se define mediante:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

También se designa a dicho número mediante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

☞ Ejemplo: calculemos los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 7\cdot 4 - 1\cdot(-2) = 30$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot 0 = a_{11}\cdot a_{22}$$

$$\det(I_2) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

❑ Determinantes de orden 3.

El cálculo es algo más complicado que en las matrices de orden 2:

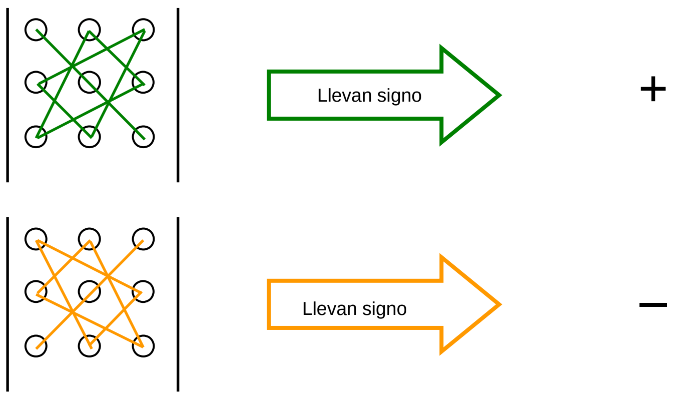
Dada una matriz cuadrada de orden tres $A=(a_{ij})$, se llama determinante de A al número real dado por la siguiente fórmula:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

También se designa a dicho número mediante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La fórmula puede recordarse a través de la denominada "regla de Sarrus":



Observa que
- en cada producto hay un factor de cada fila y de cada columna de la matriz
- están todos los posibles productos que así pueden formarse
- la mitad de ellos tiene un signo + y la otra tiene un signo –.

☞ Ejemplo: calculemos los determinantes siguientes

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

Observa que:
- el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.
- el determinante de la matriz unidad es 1.

6.Determinantes y matriz inversa

Recordemos que si A es una matriz cuadrada de orden n, se dice que A es inversible si existe una matriz A^{-1} que verifica

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Los determinantes permiten caracterizar qué matrices son invertibles y calcular la inversa en caso de que exista. Pero antes necesitamos introducir el concepto de adjunto de un elemento:

Recordemos que no toda matriz cuadrada tiene inversa.

En una A una matriz cuadrada, se llama adjunto del elemento $a_{i\,j}$, designado por A_{ij}, al producto del número $(-1)^{i+j}$ por el determinante complementario $\alpha_{i\,j}$ obtenido de A al eliminar la fila i y la columna j:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

En la definición:
- El número por el que multiplica α_{ij} es +1 ó –1 según sea i + j par o impar.
- El adjunto será el determinante complementario si i + j es par y el opuesto si i + j es impar

☞ Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Los adjuntos de los elementos a_{23} y a_{31} son, respectivamente:

$$A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \;,\; A_{31} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

El siguiente Teorema de la Matriz Inversa es fundamental:

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. A es invertible siempre y cuando es $\det(A) \neq 0$.
2. Si $\det(A) \neq 0$ la inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{Adj}\ A)^t$$

donde la matriz $\mathrm{Adj}(A) = (A_{i\,j})$ es la matriz de los adjuntos de A.

☞ Ejemplo: La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ no es invertible, pues $\det(A) = 0$.

☞ Ejemplo: obtengamos la inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Determinante: $\det(B) = 2 \xrightarrow{\det(B)\neq 0}$ existe B^{-1}

Adjuntos: $\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

La inversa es $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

☞ Ejemplo: estudiemos cuándo la matriz $C=\begin{pmatrix} a & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Determinante: $\det(C)=3a-12=0 \rightarrow a=4$

Discusión:
$$\begin{array}{lllll} a\neq 4 & \rightarrow & \det(C)\neq 0 & \rightarrow & C \text{ sí tiene inversa} \\ a=4 & \rightarrow & \det(C)=0 & \rightarrow & C \text{ no tiene inversa} \end{array}$$

7.Sistemas y matrices

❑ Notación matricial.

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse siempre como una igualdad matricial.

Por ejemplo, consideremos el siguiente caso:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -2 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices que intervienen son:

$$C=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{coeficientes}} \quad X=\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{incógnitas}} \quad B=\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{términos}}$$

Observemos que el sistema ha quedado expresado así:

$$C\cdot X=B$$

❑ Resolución matricial

Si la matriz *C* de los coeficientes es cuadrada e invertible, es posible resolver el sistema usando de la matriz inversa de la siguiente forma:

$$CX=B \rightarrow C^{-1}CX=C^{-1}B \rightarrow \mathrm{I}\cdot X=C^{-1}B \rightarrow X=C^{-1}B$$

En el caso que estamos viendo, la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Estamos ante un sistema compatible determinado cuya única solución es:

$(x,y,z)=(6,-6,5)$

❑ Regla de Cramer

Es un Teorema práctico que se refiere a sistemas de ecuaciones lineales con igual número de número de ecuaciones que de incógnitas y que permite obtener la solución a través de determinantes:

Consideremos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Si la matriz de los coeficientes tiene determinante distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado.

Y, en ese caso, la solución viene dada por

$$x_k = \frac{\det(C_{x_k})}{\det(C)} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

donde C designa a la matriz de los coeficientes y C_{x_k} designa a la matriz que se obtiene al sustituir en C la columna k por la matriz columna de los términos independientes.

Se llama sistema de Cramer a un sistema de n ecuaciones y n incógnitas con determinante de la matriz de coeficientes distinto de cero.

☞ Ejemplo: resolvamos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{cases}$$

Observemos en primer lugar que es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Tenemos así que es un sistema compatible determinado con:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{4} \; , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{7}{4} \; , \; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{1}{4}$$

☞ Ejemplo: el sistema

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 5 \end{cases}$$

no es un sistema de Cramer, ya que $\det(C) = 0$. Observemos que es incompatible.

8. Inversa y método de Gauss

❑ Transformaciones elementales.

El método de Gauss es un procedimiento que se usa para resolver sistemas, calcular la inversa de una matriz, calcular rangos,...

Se basa en aplicar las siguientes transformaciones elementales en una matriz hasta llegar a una meta:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Añadir a una fila una combinación lineal de otras.
- Permutar filas.

❑ Cálculo de la inversa

Calculamos la inversa de la matriz A con el método de Gauss así

1. Colocamos la matriz A junto a la matriz identidad:
2. Sometemos las filas a las transformaciones elementales necesarias hasta que la matriz A se transforme en la identidad.
3. La matriz en la que se ha convertido I es la inversa de A.

Primero se intenta convertir A en triangular superior o inferior, luego en matriz diagonal y por último en la matriz identidad.

☞ Ejemplo: hallemos por el método de Gauss la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) |f_1' = f_1 - f_2\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) |f_2' = f_2 - f_1\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos así:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

☞ Ejemplo: veamos que no tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) |f_2' = f_2 - 2f_1\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

¡Oh! Una fila completa de ceros a la izquierda: será imposible obtener la identidad ahí. Tenemos así que la matriz A no tiene inversa.

☞ Ejemplo: comprobemos que es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -1.5 & 0.5 & -0.5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Primero conviértela en triangular superior, luego en diagonal y por último en la matriz identidad.

9. Rango de una matriz

❑ Definición.

Se llama rango de una matriz al número de filas no nulas que aparecen al escalonarla aplicando las transformaciones elementales de Gauss.

El esquema siguiente muestra la estructura de una matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix}$$

Se llama matriz escalonada a aquella en la que:

1. Todas las filas cero están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento no nulo de cada fila, llamado *pivote*, está a la derecha del pivote de la fila anterior.

Si la matriz ya está escalonada, el rango es elemental:

☞ Ejemplo: Es $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

☞ Ejemplo: Es $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3$

☞ Ejemplo: Es $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$

❑ Cálculo del rango

El método de Gauss se usa para obtener el rango de una matriz ya que:

1. Las transformaciones elementales no cambian el rango
2. Permite transformar una matriz en escalonada.

La propiedad básica del rango que se usa es la siguiente:

Si sometemos una matriz A a cualesquiera de las transformaciones elementales obtendremos una matriz B de igual rango.

☞ Ejemplo: Obtengamos el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} f_2' = f_2 - f_1 \\ f_3' = f_3 - 2f_1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} |f_3' = f_3 - f_2\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es claramente 2.

☞ Ejemplo: Obtengamos el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Fíjate cuáles son las transformaciones elementales a las que se someten las matrices. Todas tienen el mismo rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} f_2' = f_2 - f_1 \\ f_3' = f_3 - 3f_1 \\ f_4' = f_4 - 4f_1 \end{array} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} f_3' = f_3 - 2f_2 \\ f_4' = f_4 - 3f_2 \end{array} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es también claramente 2.

10. Ampliación: determinantes de cualquier orden.

Es posible dar una definición de determinante para matrices de cualquier orden como las anteriores, pero es bastante complicada y no es práctica, al ser muy elevado el número de términos.

Para obtener determinantes de orden superior a tres o se acude a una máquina que sea capaz de calcularlos (calculadora gráfica u ordenador) o se intenta reducir el cálculo a determinantes de orden 2 y 3.

Veamos una "definición inductiva" del concepto de determinante:

Sea A una matriz cuadrada.

Si A es de orden $n = 1$, concretamente $A = [\alpha]$, llamamos determinante de A al número dado por:

$$\det(A) = \alpha$$

Si A es de orden $n > 1$, supuesto definido el determinante de toda matriz cuadrada de orden $n-1$, llamamos determinante de A al número:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

El determinante de una matriz A se designa también mediante $|A|$.

La definición dada es del tipo conocido como "inductiva" o "recurrente". Observa que nos dice directamente cómo calcular los determinantes de orden 1.
Usando la segunda parte, podremos calcular los de orden 2, a continuación los de orden 3, y así sucesivamente.

☞ Ejemplo: calculemos $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = -4$$

☞ Ejemplo: observa cómo se calcula el siguiente determinante de orden tres a partir de los elementos de la primera línea:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

Comprueba ese valor con la Regla de Sarrus.

☞ Ejemplo: Es fácil deducir, directamente de la definición, que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Ejercicios

1. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Encuentra una matriz X que cumpla

$$2X+3A=4B^t$$

siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calcule los valores de x e y que verifican:

$$3\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y & 2x \\ 1 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4y & -2y \\ -1 & -3x \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices siguientes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible:

$$3A+2B^t,\ A\cdot B+C,\ B\cdot A+C,\ A^2,\ B^2,\ C^2$$

5. Obtén la matriz X que cumpla $A+X=A\cdot B$ con:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Calcule $3A\cdot A^t-2I_2$ siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Dadas las matrices

$$B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

determine a y b para que se verifique la igualdad $B\cdot C-D=O$, siendo O la matriz nula.

8. Halle los valores de a y b para que se verifique $B\cdot C^t=A$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

9. De la matriz A sabemos que su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ y que su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^t$.

Halle los restantes elementos de A sabiendo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Resuelve la ecuación $X\cdot A+3A=2A^t$.

11. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Resuelve la ecuación $A\cdot X^t-B=3C$

12. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix}$

b) $\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

13. Halle A^{2000}, B^{2001} y C^{2003} para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.[S/97]* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

explica si hay alguna matriz *X* de segundo orden tal que $A\cdot X=B\cdot X$.

15.[S/99] Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z &= 0\\ x+2z &= -1\\ -x+y-2z &= 0\end{cases}$$

a) Expréselo en forma matricial.

b) Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

c) Resuélvalo.

16. [S/01]Sea el sistema $\begin{cases} 3x-2y-2z=3\\ x-z=1\\ 2y-z=0\end{cases}$

a) Expréselo en forma matricial.

b) ¿Posee inversa la matriz de los coeficientes? Justifique la respuesta

c) Resuélvalo y clasifíquelo.

17.[S/01]

a) Determine los valores de x e y sabiendo que es:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

b) Determine la matriz *X* con

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

18. [S/01] Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 1 & 1 & 1\\ x & x & 0\end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de *x* para los que no existe la inversa de A .

b) Para $x=3$ calcule, si es posible, A^{-1} .

19.[S/02] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}$$

calcule x , y , z sabiendo que $A\cdot B=2C-D$

20.[S/03] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de x se verifica $A^2=2A$?

b) Para $x=1$, halle A^{-1} y compruébelo.

21.[S/04] La segunda fila de la matriz *A* es $\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$ y su segunda columna es ${}^t\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Halle los restantes elementos de A sabiendo que:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

22.[S/04] Si A es una matriz 2×3, B es 2×2 y C es 3×2:

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$.

b) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t\cdot N$ sea una matriz cuadrada.

23.[S/12] Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.

En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) Para cada mes construya la matriz 3×2 correspondiente a las compras de ese mes.

b) Calcule la matriz de compras del trimestre.

c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

24.[S/12] Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) Presente en una matriz M, de dimensión 3×2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) Calcule los productos $M \cdot A$ y $M \cdot B$ e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

25. [S/12] Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{array}{c} \\ \text{grande} \\ \text{normal} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$G = \begin{array}{c} \\ \text{grande} \\ \text{normal} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$

b) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

c) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

26.[S/13] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$ con

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

27.[S/13]

a) Determine la matriz X que verifica $BX = 3AA^t$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) [1,25] Calcule la matriz Y que verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

28.[S/13]Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obtenga a y b sabiendo que se cumple

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3\mathrm{I}_2)$.

29.[S/18]Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos $A \cdot P \cdot B^t$ y $Q \cdot A \cdot C$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) Resuelva la ecuación $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^2$.

30.[S/18]

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \ , \ 3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Dadas

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

resuelva la ecuación matricial $X\,C - D^2 = \mathrm{I}_2$.

31.[S/18] Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$B + 2C \cdot A \qquad , \qquad A - (B \cdot C)^t$$

b) Resuelva: $\dfrac{1}{5}\,(B + A \cdot X) = C^t$

32.[S/18]

a) Resuelva la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Si *A* es una matriz 3×2, halle la dimensión que deben tener las matrices *B*, *C* y *D* para que sea:

$$2A - 3B \quad , \quad A \cdot A^t - C^2 \quad , \quad A \cdot D$$

33. [S/18] Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Se verifica $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,A \cdot B$?

b) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = 2B^t + \mathrm{I}_2$

34.[S/18] Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^{2018} y A^{2019}.

b) Resuelva la ecuación $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$.

35.[S/19] Resuelva la ecuación $\left(A - A^t\right) \cdot X = B$, siendo *A* y *B* las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

36. [S/19] Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz cuadrada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa $A \cdot B - C$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(A \cdot B - C)^{-1}$.

b) Resuelva la ecuación $A\,B\,X - C\,X = C^t$.

37. [S/19]Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Justifique que *A* tiene inversa y calcule A^{-1}.

b) Calcule, si existe, la matriz *X* que satisface la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

38. [S/19]Se consideran las matrices cuadradas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y las matrices fila y columnas

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$A + B\,C \ , A\,C + B\,D^t \ , B^2 + C\,D \ , A + D\,C$$

b) Resuelva la ecuación $X\,(A + \mathrm{I}_2) = 3B^t$.

39.[S/19]

a) Resuelva la ecuación $A^4 \cdot X = B^2 + \mathrm{I}_2$ si

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Razona si tiene inversa la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

40. [S/19] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Razone si la matriz A es simétrica.

b) Calcule A^{-1}.

c) Resuelva la ecuación $2X \cdot A - A^2 - 3\mathrm{I}_3 = \mathrm{O}$.

41.[S/19] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
2. $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) Resuelva la ecuación $B \cdot X + A = C$ donde

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

42.[S/20] Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas

43. [S/20] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores de a tiene inversa la matriz A.

b) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.

c) Resuelva la ecuación $X \cdot A^{-1} - B \cdot B^t = \mathrm{I}_3$ para $a = 0$.

44. [S/20] Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) Compruebe que $Y = X^{-1}$.

b) Halle X e Y para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

45.[S/20] Consideremos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = A \cdot A^t \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B ?

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de la matriz B.

c) Resuelva la ecuación matricial $B^t \cdot X + 9C = \mathrm{O}$ para $a = 1$.

46. [S/20] Se consideran las matrices cuadradas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -3 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$C^t \cdot A \,, B \cdot C \,, C \cdot A + C \,, C^2$$

b) Calcule los valores del parámetro k para los que la matriz A es invertible.

c) Para $k = -1$, calcule la inversa de la matriz A.

47. [S/20] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa A?

b) Para $m = 0$, resuelva la ecuación $X \cdot A = A \cdot A^t$.

48. Dado el sistema $\begin{cases} x-y-z = 1 \\ -x+3z = 0 \\ -2x+5y-3z = -1 \end{cases}$

a) Comprueba que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve matricialmente el sistema.

49. Dado $\begin{cases} x+y+z = 4 \\ x+3y+2z = 5 \\ 2x+ay+3z = 13 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de a es compatible determinado?

b) Resuélvelo para $a = 2$

c) ¿Cómo es el sistema para $a = 4$?

50. Demuestra que para ningún valor de m es incompatible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y = 5 \\ x+my = 2 \end{cases}$$

Cuestiones

1. Una matriz A se dice que es antisimétrica si su traspuesta coincide con su opuesta. Escribe una matriz antisimétrica y observa que debe ser $a_{ji} = -a_{ij}$, $\forall i, j$

2. Comprueba la propiedad asociativa del producto con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n .

4. Se dice que dos matrices A y B conmutan si $AB = BA$. Escribe dos matrices cuadradas distintas y no nulas que conmuten.

5. Comprueba la propiedad distributiva

$$A(B+C) = AB+AC$$

con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si cumple $A \cdot A^t = I$.

Estudia si es ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Comprueba con A y B que es $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sea A una matriz de dimensión 2×3 . ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? ¿Y una matriz columna?

Idem para el producto $B \cdot A$.

9. En cada caso, escribe dos matrices 2×2 , A y B, tales que: Comprueba con ejemplos que puede ser

a) $A \cdot B = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$

b) $A \cdot B = A \cdot C$ con $B \neq C$

c) $(A+B)^2 \neq A^2+B^2+2AB$

d) $(A-B)^2 \neq A^2+B^2-2AB$

e) $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$

10. Sean A y B dos matrices cuadradas e inversibles del mismo orden. Demuestra que es

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

11. Sean A, B, C y D matrices cuadradas donde A y B son invertibles. Despeja X en las igualdades siguientes:

a) $A \cdot X - B = C$

b) $X \cdot B - A \cdot C = 3D$

c) $2C - A \cdot X = B \cdot D$

d) $3A \cdot D - 2X \cdot B = 2A \cdot C$

12. Demuestra que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 2 coincide con el de su traspuesta.

13. Sea A una matriz cuadrada con $\det A = k$.

a) ¿Cuándo es A inversible?

b) Averigua cuál es el valor de $det\left(A^{-1}\right)$.

14. Sea A una matriz cuadrada de tercer orden. Con $det\,A=3$. Razona que es $det\,(2\text{A})=24$

15. Sea $A \in M_{3\times3}$ con $det\,A=2$. Obtén el valor de $det\,(3\text{A})$ y $det\left(A^{-1}\right)$.

16. Sea $A=\left(c_1 \quad c_2 \quad c_3\right) \in M_{3\times3}$, con $det\,A=-4$.

Deduce el valor de:

a) $det\left(c_1+2c_2 \quad c_2 \quad c_3\right)$

b) $det\left(3c_1 \quad c_2 \quad 2c_3\right)$

c) $det\left(c_1 \quad c_2 \quad c_1+2c_3\right)$

d) $det\left(c_1+c_3 \quad c_2 \quad c_1\right)$

17. [S/97] Siendo $E^t=\left(1,2,3\right)$, calcula el determinante de la matriz $E \cdot E^t$.

18. [S/97] Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas y C una matriz 2×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A \cdot B \cdot C$? ¿Qué dimensiones tiene la matriz $A \cdot B \cdot C$?

19. [S/97] Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1×1, y tal que el producto de la traspuesta de D por la propia D es 3×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene D? ¿Tiene D inversa?

20. [S/98] Si A y B son dos matrices cualesquiera, ¿es correcta la siguiente cadena de igualdades?

$$(A+B)\cdot(A-B)=A(A-B)+B(A-B)=$$
$$=AA-AB+BA-BB=A^2-AB+BA-B^2=$$
$$=A^2-B^2$$

21. [S/10] Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices $A \cdot B \cdot C$ es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

22. [S/13] Si A es una matriz cuadrada de orden 2 y D es una matriz 2 \times 3, determine en cada caso la dimensión de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C \cdot D + A$, $C^t \cdot D \cdot C$, $D \cdot C^t$, $C \cdot D \cdot C^t$.

Autoevaluación

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

comprueba con ellas que se verifica

$$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$$

2. Obtén x e y para que conmuten las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}x & 5\\ y & 7\end{pmatrix}$$

3. Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que la inversa de A es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

b) Calcula X en la igualdad

$$A\cdot X = B$$

4. Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 2 & -1 & x\\ 1 & 10 & -6\end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x no tiene inversa?

b) Obtén la inversa A^{-1} para $x=0$.

5. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S:\begin{cases} x+y=3\\ x+z=4\\ x+y-z=0\end{cases}$$

a) Escribe matricialmente el sistema

b) Comprueba que la matriz de coeficientes del sistema es inversible, calculando su inversa.

c) Resuélvelo utilizando el apartado anterior.

6. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z &= 0\\ x+y+z &= a+1\\ ax+3y-z &= 4\end{cases}$$

a) Demuestra que si $a\neq 3$ el sistema es compatible determinado.

b) Resuélvelo para $a=0$.

c) ¿Cómo es el sistema para $a=3$?

Autoevaluación

1. Basta efectuar y comprobar que los resultados son iguales:

$$(A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B^t\cdot A^t$$

2. Se verifica $\qquad AB = BA$

Efectuando: $\begin{pmatrix} x-y & -2 \\ y & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x+5 \\ y & -y+7 \end{pmatrix}$

Igualando obtenemos:

$$\begin{cases} x-y=x & \rightarrow \quad y=0 \\ -2=-x+5 & \rightarrow \quad x=7 \\ y=y & \\ -y+7=7 & \rightarrow \quad y=0 \end{cases}$$

Concluimos así que

$$x=7\,,y=0$$

Así, resulta que es:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

3.

a) Basta efectuar y comprobar que su producto es la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Podemos despejar, ya que conocemos la inversa de la matriz A:

$$A\cdot X = B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

Basta calcular:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.

a) Una matriz tiene inversa sólo cuando su determinante es distinto de cero.

$$\det(A) = x^2+2x-15$$

Igualando a cero ese determinante:

$$x^2+2x-15=0 \rightarrow \left|\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$$

Concluimos: A no tiene inversa precisamente cuando se tiene $x=-5$ ó $x=3$.

b) $x=0 \rightarrow \det(A)=-15$

Es $\qquad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\cdot(\text{Adj}\,A)^t$

Realizando los cálculos de los adjuntos:

$$(A)^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & -10 & -1 \\ 12 & -5 & -2 \\ 21 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

5.

a) El sistema expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{C}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

b) Veamos que el determinante de C no es cero:

$$\det(C) = 1 \neq 0$$

Su inversa viene dada por:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\cdot(\text{Adj}\,C)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Para resolver matricialmente, despejamos:

$$C\cdot X = B \rightarrow X = C^{-1}\cdot B$$

Así, obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6.

a) El determinante de la matriz de los coeficiente es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2a-6$$

Y veamos cuándo es cero:

$$\det(C) = 0 \rightarrow 2a-6=0 \rightarrow a=3$$

Deducimos, por la Regla de Cramer, que el sistema es compatible determinado sólo cuando $a\neq 3$ (pues determinante de los coeficientes no es cero).

a) Para $a = 0$ podemos resolver por Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(C)} = \frac{6}{-6} = -1$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{\det(C)} = \frac{-9}{-6} = 1.5$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}}{\det(C)} = \frac{-3}{-6} = 0.5$$

b) Para $a = 3$ no podemos aplicar la Regla de Cramer, ya que el determinante de los coeficientes es igual a cero.

El sistema es bien compatible determinado, bien incompatible.

Resolvemos directamente por Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ x+y+z & = & 4 \\ 3x+3y-z & = & 4 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{e_2'=e_2-e_1 \\ e_3'=e_3-3e_1}]{e_1'=e_1} \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 2z & = & 4 \\ 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Si aplicamos otra vez la reducción a las dos últimas vemos claramente que nos quedará 0=0, luego estamos ante un sistema compatible indeterminado.