Modelos De Selectividad – Andalucía

Instrucciones

1. Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
2. Todos los ejercicios se valorarán sobre un máximo de 2,5 puntos.
3. Contesta las preguntas razonando tus conclusiones; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima en cada apartado. Justifique siempre las respuestas.
4. Escribe de forma ordenada y con letra clara.
5. Se permite el uso de una calculadora no programable y no gráfica. Si obtiene resultados directamente con ella, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Un laboratorio farmacéutico tiene una línea de producción con dos medicamentos A y B, con marca comercial y genérico respectivamente, de los cuales, entre los dos como máximo puede fabricar 10 unidades a la hora. Desde el punto de vista del rendimiento, se han de producir al menos 4 unidades por hora entre los dos y por motivos de política sanitaria, la producción de A ha de ser como mucho 2 unidades más que la de B.

Cada unidad de tipo A que vende le produce un beneficio de 60 euros, mientras que cada unidad de tipo B le produce un beneficio de 25 euros. Si se vende todo lo que se produce, determine las unidades de cada medicamento que deberá fabricar por hora para maximizar su beneficio y obtenga el valor de dicho beneficio.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \; , \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (0.5) Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa.

b) (1.25) Para $a = 3$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - X \cdot B = C$.

c) (0.75) Para $a = 3$, compruebe que $A^2 = 11A$ y exprese A^8 en función de la matriz A.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

a) (1) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todo su dominio.

b) (0.7) Calcule los extremos de la función .

c) (0.8) Represente el recinto que encierra la gráfica de f , las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje OX . Calcule el área de dicho recinto.

EJERCICIO 4

a) [2] Sea f una función de la que sabemos que la gráfica de su derivada, f', es una parábola con vértice en el punto $(0\,,8)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-4\,,0)$ y $(4\,,0)$.

1. Dibuje la gráfica de f' .
2. A partir de dicha gráfica, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como las abscisas de los extremos relativos de f .
3. Sabiendo que la gráfica de f pasa por el origen de coordenadas, calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) [0,5] Calcule la derivada de la función $g(x) = (-3 + x^2)e^{2x-1}$

Modelo 1

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Un equipo andaluz de baloncesto jugó en una temporada un 40 % de los partidos en casa y el resto fuera. De los partidos que jugó en casa, obtuvo un 60 % de victorias y el resto fueron derrotas, mientras que de los que jugó fuera, obtuvo un 30 % de victorias y el resto derrotas. Se elige un partido de este equipo al azar.

a) [1,25] Calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria.

b) [1] ¿Qué probabilidad hay de que se haya sido jugado en casa sabiendo que finalmente fue una derrota?

c) [0,25] Si además se sabe que el 10 % de las victorias obtenidas en casa y el 20 % de las obtenidas fuera se produjeron tras una prórroga, calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria y que además esa victoria haya sido tras una prórroga.

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo espacio muestral con $\mathrm{p}\,(A^c) = 0.4$ y $\mathrm{p}\,(A \cap B^c) = 0.12$.

a) [0.5] Calcule $\mathrm{p}\,(A)$ y $\mathrm{p}\,(A \cap B)$.

b) [0.5] Determine $\mathrm{p}\,(B)$ para que A y B sean independientes.

c) [1.5] Si $\mathrm{p}\,(B^c) = 0.2$, calcule $\mathrm{p}\,(A \cup B)$, $\mathrm{p}\,(A^c \cup B^c)$ y $\mathrm{p}\,(A/B^c)$.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) [1] En una población constituida por los números naturales del 1 al 9, ¿cuántas muestras de tamaño 2 se pueden formar por muestreo aleatorio simple? Si se elige al azar una de esas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que el valor medio de los dos números de esa muestra sea 5?

b) [1,5] Para estimar la proporción de andaluces contagiados por una infección en un momento determinado, se ha tomado una muestra de 10000 personas, resultando que 500 de ellas estaban infectadas.

1. Con ese dato, establezca un intervalo, al 97 % de confianza, para la proporción real de infectados en la población andaluza.
2. A la vista del intervalo obtenido, razone si se podría aceptar que el 6 % de la población andaluza estaba infectada.
3. Se toma una nueva muestra de mayor tamaño y resulta que hay la misma proporción de positivos en la nueva muestra. Con estos nuevos datos, razone si el nuevo intervalo al 97 % de confianza contiene al intervalo anterior o está contenido en él.

EJERCICIO 8

El tiempo, en horas, que los alumnos de un instituto dedican a estudiar para los exámenes finales, se distribuye siguiendo una ley Normal de media desconocida y varianza 81. Se toma una muestra aleatoria de 16 alumnos de dicho instituto, obteniéndose los siguientes tiempos:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 32 51 49 40

a) [1.5] Obtenga un intervalo, con un 95 % de confianza, para estimar el tiempo medio de estudio de los alumnos de ese instituto.

b) [1] Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar, para estimar el tiempo medio de estudio de esos alumnos con un error inferior a 2 horas y un nivel de confianza del 98 %.

Modelo 2 [O]

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B . Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.

Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

Sean la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [0,7] Determine para qué valores de m tiene inversa la matriz A.

b) [1,8] Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A – A^2 = \mathrm{I}_3$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) [1] Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) [0,5] Represente gráficamente la función.

c) [0,5] Calcule $\int f(x)\, \mathrm{d}x$.

d) [0,5] Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

a) [1] Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad , \quad f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2x^2}$$

b) [0,7] Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) [0,8] Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

Modelo 2 [O]

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B , contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B , generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) [1.5] ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) [1] Si no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

EJERCICIO 6

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

a) [1] Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) [0.75] Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) [0.75] Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) [1,5] En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informática, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

   ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear, cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) [1] Dada la población $\{a, 10, 12, 11, 18\}$, ¿cuánto debe valer a, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13.2?

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de individuos de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) [1.5] Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

b) [1] Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

Modelo 3

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) [1] Una frutería vende dos tipos de surtidos de frutos rojos, A y B . El surtido de tipo A contiene 75 g de arándanos, 100 g de frambuesas y se vende a 2.40 euros, mientras que el de tipo B contiene 75 g de arándanos, 50 g de frambuesas y se vende a 1.80 euros. La frutería dispone de un total de 3.75 kg de arándanos y 4 kg de frambuesas y el número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B. Formule, sin resolver, el problema que permite obtener el número de surtidos de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) [1.5] Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:

$$x + 4y \geq 5 , x + 2y \geq 4 , 7x + 5y \leq 35 , x \geq 0$$

¿En qué punto de esta región la función $F(x, y) = 2x + y$ alcanza el mínimo y cuál es dicho valor?

EJERCICIO 2

Se considera la ecuación matricial $(10\mathrm{I}_3 - A) \cdot X = B$, donde B es una matriz de tres filas y una columna y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Razone qué dimensión ha de tener la matriz X .

b) [0,5] ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3×1? ¿Por qué?

c) [1,5] Resuelva dicha ecuación matricial si $B = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^t$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dados dos números reales *a* y *b* se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2a & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ -2x^2 - 4a & \text{si} \quad -2 < x \leq \ \ 2 \\ -8x + b & \text{si} \quad \ \ 2 < x \leq \ \ 3 \end{cases}$$

a) (1) Calcule *a* y *b* para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es *f* derivable?

b) (0.8) Para $a = -2$ y $b = 16$, estudie la monotonía de f y calcule sus extremos relativos y absolutos.

c) (0.7) Para $a = -2$ y $b = 16$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de *f* , el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

EJERCICIO 4

a) [1] Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(5x^3 + 4x - 2\right)^4 \cdot \ln\left(2x^5 - 4x^3 + x\right) \quad , \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x^2 - 5x}}{\left(6x^2 + 2\right)^3}$$

b) [1.5] Halle la función $h(x)$, sabiendo que su derivada es $h'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ y que $h(2) = \dfrac{11}{3}$.

Modelo 3

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que:

$$\mathrm{p}\left(A-B\right)=0.3\,,\,\mathrm{p}\left(A^c\right)=0.35\ \ ,\,\mathrm{p}\left(B\right)=0.55$$

a) [0,8] Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos.

b) [0,6] Calcule la probabilidad de que ocurra B , sabiendo que no ha ocurrido A.

c) [0,6] Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

d) [0,5] Razone si los sucesos A y B son independientes.

EJERCICIO 6

En una determinada muestra de suelo se han aislado dos tipos de bacterias, A y B , de las cuales el 70 % son de A y el 30 % de B . La probabilidad de que una bacteria de tipo A reaccione a la prueba del nitrato es 0.15 y para la bacteria B es 0.8. De las bacterias aisladas se selecciona una al azar.

a) [1] Calcule la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato.

b) [1] Si la bacteria ha reaccionado a la prueba del nitrato, calcule la probabilidad de que sea del tipo B .

c) [0,5] Calcule la probabilidad de que la bacteria sea del tipo A y no reaccione a la prueba del nitrato.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) [1,25] Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas de un municipio, cuyos estratos son los siguientes tramos de edad: de 0 a 25 años, de 26 a 45, de 46 a 60 y de 61 años o más. En el primer tramo hay 15 000 personas, en el segundo hay 16 800, en el tercero 11 400 y en el cuarto 6 000. Sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer tramo, calcule el tamaño de la muestra total y su composición.

b) [1,25] Dada la población $\{1,\ 3,\ 5\}$, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determine la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

EJERCICIO 8

Se quiere estimar la proporción de imprentas de una región que incluyen el uso de celulosa reciclada en los libros que imprimen. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 50 imprentas de esa región y en ella hay 12 que usan dicho material.

a) [1,5] Obtenga un intervalo de confianza al 95 %, para estimar la proporción real de imprentas que usan celulosa reciclada.

b) [1,5] Determine el tamaño mínimo de la muestra de imprentas de esa región que se deben seleccionar para que, manteniendo el mismo nivel de confianza y proporción muestral anteriores, la amplitud del intervalo sea como máximo de 0.2.

Modelo 4

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0.7) Calcule A^{40} y $(A^t)^{30}$.

b) (0.6) Calcule $\left(A^{-1} + A\right)^2$.

c) (1.2) Resuelva la ecuación matricial $\left(A^t + \mathrm{I}_2\right) \cdot X = A^t - \mathrm{I}_2$.

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 3y \geq -9 , \; x + y \leq 11 , \; 6x + y \leq 36 , \; x + 2y \geq 6$$

a) [1.5] Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) [0.25] ¿Pertenece el punto $(5\,,7)$ a la región factible anterior?

c) [0.75] Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F\,(x\,,y) = 10x - 6y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Sea la función

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -3x^2 + 4 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) [1] Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todo su dominio.

b) [0.8] Represente gráficamente la función *f* .

c) [0.7] Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función *f* , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

EJERCICIO 4

Una fábrica estima que sus costes de producción, expresados en miles de euros, vienen dados por la función

$$f\,(x) = x^2 - 6x + 10$$

donde x es la cantidad semanal a producir expresada en miles de kilogramos.

a) [1] ¿Cuál debe ser la producción semanal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

b) [1.5] Calcule la recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función de costes y la recta tangente hallada.

Modelo 4

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42 % de policías, el 20 % de bomberos y el 50 % de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) (1.5) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) (1) Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

EJERCICIO 6

Una urna A contiene 4 bolas rojas y 5 verdes y otra urna B contiene 6 bolas rojas y 3 verdes. Lanzamos dos dados y si la suma es mayor o igual a 9, extraemos una bola de la urna A y en caso contrario, la extraemos de la urna B.

a) [1.5] Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea verde y de la urna B .

b) [1] Halle la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se quiere estudiar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en una determinada población.

Para ello, se elige una muestra al azar de 1000 ciudadanos, revelándose que el 15 % de ellos están enfermos.

a) [1.5] Calcule un intervalo de confianza al 95 %, para estimar la proporción real de enfermos de COVID-19 en dicha población.

b) [1] Determine el tamaño muestral mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en esa población sea inferior al 1 %.

EJERCICIO 8

El peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta sigue una ley Normal de media 1000 g y varianza 256 g^2 .

a) [0.75] Calcule la probabilidad de que el peso medio de las muestras de tamaño 64 sea menor que 996 g.

b) [1.5] Tras varias denuncias presentadas por falta de peso en los citados paquetes, una organización de consumidores ha procedido a tomar una muestra de 64 paquetes, resultando que la suma de los pesos ha sido de 63 744 g. Halle un intervalo de confianza al 90 % para estimar el peso medio real de los paquetes de arroz de esa marca.

c) [0.25] A la vista del intervalo obtenido y teniendo en cuenta que el peso que marca el paquete es de 1000 g, ¿cree que la denuncia tiene base?

Modelo 5 [E]

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

a) [0.7] Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.

b) [1] Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) [0.8] Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19 \text{ , } 3x - 4y \leq -13 \text{ , } x \geq -7 \text{ , } -x - y \geq 2$$

a) [1.5] Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) [0.5] ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G\,(x\,,y) = -\frac{1}{5}\,x + \frac{2}{5}\,y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) [0.5] Responda de forma razonada si la función G puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $$f\,(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) [0.8] Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) [0.7] Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} f\,(x)\;\mathrm{d}x$

EJERCICIO 4

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función, donde *t* es el tiempo medido en meses a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020:

$$f\,(t) = \begin{cases} -t^2 + 2\,t - 0.3 & \text{si} \quad 0.2 \leq t \leq 1.8 \\ 0.1\,t - 0.12 & \text{si} \quad 1.8 < t \leq 5 \\ -0.5\,t^2 + 8.3\,t - 28.62 & \text{si} \quad 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) [1.5] Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.

b) [1] ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

Modelo 5 [E]

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

a) [1,5] Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) [1,5] Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

c) [0.75] Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

EJERCICIO 6

En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

a) [1] Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) [0.5] Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) [1] Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

BLOQUE D

EJERCICIO 3

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) [1.5] Calcule un intervalo de confianza al 99.5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

b) [1.5] Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

EJERCICIO 4

Sea X una v. a. que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) [0.5] ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) [1] Para estimar la media poblacional de la variable X , se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

$$11.8\ ,\ 10\ ,\ 9.8\ ,\ 12\ ,\ 9.7\ ,\ 10.8\ ,\ 9.6\ ,\ 11.3\ ,\ 10.4\ ,\ 12.2\ ,\ 9.1\ ,\ 10.5$$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) [1] Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

Modelo 6

BLOQUE A

EJERCICIO 1

La Agencia Espacial Europea contará con un presupuesto de 2.4 millones de euros para financiar misiones sobre Observación de la Tierra y para financiar programas de Transporte Espacial. Cada misión supone una inversión de 200 000 euros y cada programa, 100 000 euros. Teniendo en cuenta que en la decisión final deben superarse los 2 millones de euros de inversión y el número de misiones debe ser al menos 4, pero no más de la mitad del número de programas, 3⁄4cuántas misiones y cuántos programas se deben llevar a cabo para obtener el máximo de la función $F(x,y) = 0.6x + 0.4y$, con x misiones e y programas?

EJERCICIO 2

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) [1] Calcule A^2, A^3 , A^4 y deduzca la expresión de A^n , con n un número natural.

b) [0.5] Razone si existe la inversa de la matriz B .

c) [1] Razone si la ecuación matricial $B \cdot X = C$ tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} a\,x + b & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - b\,x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) [0.5] Halle el valor de b para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) [0.5] Para $b = \dfrac{1}{2}$, halle el valor de a para que f sea derivable en $\mathbb{R}$.

c) [0.7] Para $a < 0$ y $b = \dfrac{1}{2}$, estudie el crecimiento y halle las abscisas de los extremos de la función.

d) [0.8]Para $a = 0$ y $b = \dfrac{1}{2}$, represente la región del plano delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Calcule el área de dicha región.

EJERCICIO 4

La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función $c(t)$, con $t \in [0, 24]$, medido en horas. La variación instantánea de esta función es la derivada de c, dada por

$$c'(t) = 0.03\,t^2 – 0.9\,t + 6 \quad , \quad t \in (0, 24)$$

a) [1.25] Estudie los intervalos en los que la función c es creciente.

b) [0.5] Analice los puntos críticos de la función c, indicando en cuáles se alcanza el máximo y el mínimo relativos.

c) [0.75] Halle la expresión analítica de la función c, sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial.

Modelo 6

BLOQUE C

EJERCICIO 1

Una empresa dedicada a la fabricación de coches lanza al mercado un nuevo modelo que fabrica en tres plantas diferentes, A, B y C . La planta A produce el 45 % de los vehículos, la planta B el 21 % y el resto los produce la planta C . Se ha detectado un defecto en la colocación del airbag, que afecta al 1 % de los coches procedentes de la planta A, al 3 % de los procedentes de la planta B y al 2 % de los de la planta C . Se selecciona un coche al azar de este nuevo modelo.

a) [1.25] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y proceda de la planta C?

b) [1.25] Si el coche elegido no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la planta A?

EJERCICIO 2

La probabilidad de que una persona sana se contagie de otra enferma por un virus es del 80 % si coinciden en una reunión.

a) [1] Si una persona enferma se reúne con dos personas sanas, teniendo en cuenta que contagiar a distintas personas son sucesos independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que se contagien las dos personas a la vez? ¿Cuál es la probabilidad de que se contagie alguna de ellas?

b) [1.5] Una prueba para detectar la enfermedad da el resultado correcto en el 90 % de los casos cuando se le aplica a personas contagiadas y da falsos positivos en el 5 % de los casos cuando se aplica a personas sanas. Si una persona sana se reúne con una enferma y resulta positivo en una prueba posterior, ¿qué probabilidad hay de que se haya contagiado en la reunión?

BLOQUE D

EJERCICIO 3

Para un estudio acerca del uso del transporte público en una ciudad, se selecciona una muestra aleatoria de 500 individuos, obteniéndose que 175 de ellos lo usan.

a) [1.5] Halle un intervalo de confianza al 94 % para estimar la proporción real de individuos que usan el transporte público en esa ciudad.

b) [1] Manteniendo la proporción muestral, ¿cuántos individuos se deberían seleccionar como mínimo, para que, con un nivel de confianza del 97 %, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 2 %?

EJERCICIO 4

La estatura de las mujeres de una población sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 7 cm.

a) [1.5] Se toma una muestra aleatoria de 300 mujeres de esta población, que da una estatura media de 168 cm. Construya un intervalo de confianza al 97 % para estimar la estatura media de las mujeres de esta población.

b) [1] Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población para que, con un nivel de confianza del 94 %, el error máximo cometido al estimar la estatura media de las mujeres de esa población sea inferior a 1.2 cm.