Instrucciones

1. Elige entre realizar bien los tres ejercicios de la Opción A, bien los tres ejercicios de la Opción B, sin mezclar los de una opción con los de otra.
2. Todos los ejercicios se valorarán sobre un máximo de 2,5 puntos.
3. Contesta las preguntas razonando tus conclusiones; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima en cada apartado. Justifique siempre las respuestas.
4. Escribe de forma ordenada y con letra clara.
5. Se permite el uso de una calculadora no programable y no gráfica. Si obtiene resultados directamente con ella, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) [1] Se considera el recinto cuadrado de vértices $(1\,,0)\,,(0\,,1)\,,(-1\,,0)\;y\,(0\,,-1)$.

Indique en qué puntos del recinto se alcanzan el valor máximo de la función $F\,(x\,,y) = 3x + 2y + 7$ y el valor mínimo de la función $G\,(x\,,y) = x + y + 6$, calculando dichos valores.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $\left(A - A^t\right) \cdot X = B$, siendo A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sea la función

$$f\,(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + 1$$

a) [1,8] Halle a y b de forma que f tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ tenga pendiente $m = -1$.

b) [1,7] Para $a = -1$ y $b = -1$, estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

EJERCICIO 3

Una cooperativa envasa zumos de naranja, zumos de piña y zumos de melocotón en botellas de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60 % de las botellas son de zumo de naranja y el 30 % de piña. Además, el 80 % de las botellas de zumo de naranja y el 70 % de las de zumo de piña son de 2 litros, mientras que el 60 % de las de melocotón son botellas de 1 litro. Se elige al azar una botella envasada por la cooperativa.

a) [1] Calcule la probabilidad de que la botella sea de 2 litros.

b) [0,75] Calcule la probabilidad de que el zumo sea de naranja, sabiendo que la botella es de 2 litros.

c) [0,75] Calcule la probabilidad de que el zumo sea de melocotón, sabiendo que la botella es de 1 litro.

EJERCICIO 4

Para estimar la proporción de empleados de una empresa que usan lentillas, se toma una muestra al azar de 60 empleados de la misma y se observa que 16 usan lentillas.

a) [1,5] Halle, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción.

b) [1] Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior y manteniendo la misma proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido en la estimación de la proporción sea inferior a 0.1.

Modelo 1

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) [1,5] ¿Tiene inversa la matriz $A \cdot B - C$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(A \cdot B - C)^{-1}$.

b) [1] Resuelva la ecuación matricial $A\,B\,X - C\,X = C^t$.

EJERCICIO 2

Unos productores de cereales realizan un estudio para conocer la posible demanda de su producto. Concluyen que la función de demanda de dichos cereales tiene la forma

$$D\,(x) = -200x^3 + 2100x^2 - 7200x + 10000 \ , \ 0 \leq x \leq 4$$

donde x es el precio en euros por kilogramo de producto y $D\,(x)$ es la cantidad de kilogramos de cereales que los consumidores están dispuestos a comprar a dicho precio x.

a) [0,5] ¿Cuál es la cantidad de cereales demandada si el precio es de 0.50 euros por kilogramo?

b) [2] Calcule para qué precio se alcanza una demanda mínima del producto y determine dicha demanda.

EJERCICIO 3

Una determinada enfermedad puede estar provocada por una sola de las causas, A, B o C. En el 35 % de los casos está provocada por A, en el 40 % por B y en el 25 % por C.

Se sabe que el tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 15 % de los casos si está provocada por A, en el 45 % si está provocada por B y en un 20 % si está provocada por C. Se elige al azar una persona afectada por esa enfermedad.

a) [1.5] ¿Cuál es la probabilidad de que necesite hospitalización?

b) [1] Si no necesita hospitalización, ¿cuál es la probabilidad de que la causa de la enfermedad sea C?

EJERCICIO 4

El tiempo de duración, en horas, de un modelo de bombilla LED, sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 150 horas. Con una muestra de bombillas de ese modelo y a un nivel de confianza del 98.5% se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(18475.7\,,18524.3)$.

a) [1.5] Calcule el valor que se obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de la muestra utilizado.

b) [1] ¿Cuál será el error máximo de estimación de la media si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6%?

Modelo 2 ()

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se quiere elaborar dos suplementos alimenticios UNAL y DOSAL con idea de completar la dieta de ciertos individuos. Cada comprimido de UNAL aporta 5 unidades de calcio, 5 de proteínas y 1 caloría y tiene un coste 0.6 euros, mientras que un comprimido de DOSAL aporta 2 unidades de calcio, 5 de proteínas y 3 calorías, siendo su coste de 1 euro.

Sabiendo que los mínimos diarios requeridos son 10 unidades de calcio, 20 de proteínas y 6 calorías, encuentre la combinación de comprimidos de los dos suplementos que satisfacen las necesidades diarias con el menor coste.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x) = x - \frac{3x-1}{x+1}$$

a) (1) Indique el dominio de *f* y calcule $f'(x)$.

b) (0.5) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{2}{3}$.

c) (1) Halle los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a dicha gráfica es horizontal.

EJERCICIO 3

Para tratar cierta enfermedad, en un hospital se utilizan tres fármacos distintos, A, B y C, administrándose a cada enfermo un solo fármaco. El 30% de los pacientes es tratado con el fármaco A, el 50% es tratado con el B y el resto con el fármaco C. La probabilidad de que la enfermedad se cure con el fármaco A es de 0.6, de que se cure con el fármaco B es de 0.8 y de que se cure con el fármaco C es de 0.7. Se elige al azar un paciente de ese hospital con esa enfermedad.

a) (1.5) Calcule la probabilidad de que el paciente se cure.

b) (1) Sabiendo que el paciente se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tratado con el fármaco A?

EJERCICIO 4

La producción en kilogramos por árbol de aguacates de una comarca sigue una distribución Normal de desviación típica 4 y media desconocida.

a) (1) Obtenga el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la media poblacional con un error de estimación inferior a 2.1 kg y una confianza del 97%.

b) (1.5) Se toma una muestra aleatoria de 9 árboles, cuyas producciones en kilogramos han sido:

15 120 50 40 5 46 52 48 10

Obtenga el intervalo de confianza al 97% para estimar la producción media de aguacates por árbol y calcule el error máximo de estimación.

Modelo 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1.5) Justifique que la matriz A tiene inversa y calcule A^{-1}.

b) (1) Calcule, si existe, la matriz *X* que satisface la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

a) (0.75) Estudie su monotonía y halle sus extremos relativos.

b) (0.75) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. Calcule su punto de inflexión.

c) (0.5) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

d) (0.5) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

EJERCICIO 3

Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que

$$\mathrm{p}(B) = 0.4 \ , \ \mathrm{p}(A/B) = 0.25\mathrm{pp}(A - B) = 0.4.$$

a) (0.5) Calcule $\mathrm{p}(A \cap B)$.

b) (1) Calcule $\mathrm{p}(A)$ y $\mathrm{p}(A \cup B)$.

c) (1) ¿Son *A* y *B* independientes? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 4

En una muestra de 320 personas jubiladas elegidas al azar en un distrito de una ciudad, resultó que 96 de ellas realizaban alguna actividad física.

a) (1.5) Construya un intervalo de confianza al 95% para la proporción de personas jubiladas que realizan alguna actividad física en ese distrito.

b) (1) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral, halle el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0.1 con un nivel de confianza del 98%.

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Consideremos el recinto de#nido por las siguientes desigualdades:

$$7y \leq 15 + 3x \ , \ y \geq x - 3 \ , \ 3y - x + 11$$

a) [2] Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.

b) [0,5] Calcule en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función $H\left(x\,,y\right) = 4x - y - 16$ restringida al anterior recinto y obtenga dichos valores.

EJERCICIO 2

a) [1] Calcule la derivada de

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \ , \ g\left(x\right) = \left(x^2+1\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{2x-1}$$

b) b) [1,5] Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función$h\left(x\right) = x^2 - 6x + 8$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

EJERCICIO 3

El 17% de la población adulta de una ciudad sigue una dieta de adelgazamiento y practica algún deporte regularmente. El 58% ni sigue una dieta de adelgazamiento ni hace deporte regularmente. Además, se sabe que de los que hacen deporte regularmente, el 50% hace dieta de adelgazamiento. Se elige al azar un adulto de esa población.

a) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que siga una dieta de adelgazamiento o que practique deporte regularmente?

b) [1] Si el individuo elegido sigue una dieta de adelgazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que practique deporte con regularidad?

c) [0,5] ¿Son independientes los sucesos “Seguir una dieta de adelgazamiento” y “Practicar algún deporte regularmente”?

EJERCICIO 4

La cantidad de azúcar que añade un fabricante de refrescos a sus productos sigue una ley Normal cuya varianza es 225 mg^2 . Se ha seleccionado al azar una muestra de 25 refrescos de ese fabricante, en la que se ha obtenido una media de 175 mg de azúcar añadido por refresco.

a) [1,5] Determine un intervalo de confianza al 90% para la cantidad media de azúcar añadida a cada refresco.

b) [1] ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el intervalo de confianza correspondiente al 80 % tenga una amplitud como máximo de 5 mg?

Modelo 3 (S)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) [1]Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$A + B \cdot C \ , \ A \cdot C + B \cdot D^t \ , \ B^2 + C \cdot D \ , \ A + D \cdot C$$

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X\,(A + \mathrm{I}_2) = 3B^t$.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f\,(x) = ax^2 + \frac{b}{x} \ , \ (x \neq 0)$$

a) [1] Determine el valor de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(1\,,3)$.

b) [0,75] Para $a = 1$ y $b = 2$, razone si en el punto $(1\,,3)$ la función presenta un máximo o un mínimo.

c) Calcule $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio dado. Se sabe que

$$\mathrm{p}\,(A) = 0.5 \ , \ \mathrm{p}\,(A \cup B) = 0.75 \ , \ \mathrm{p}\,(A - B) = 0.3.$$

a) [0,5] Calcule $\mathrm{p}\,(A \cap B)$.

b) [1] Calcule $\mathrm{p}\,(A/B^c)$.

c) [1] ¿Son independientes los sucesos *A* y *B* ? ¿Son los sucesos *A* y *B* incompatibles?

EJERCICIO 4

La Consejería de Educación elige una muestra de 5 000 estudiantes de 1 de Bachillerato de Ciencias Sociales y los encuesta para conocer la opinión que tienen sobre la elección de cierta materia entre las optativas para cursar 2 de Bachillerato. El resultado de la encuesta revela que 2 250 estudiantes piensan elegir dicha materia optativa.

a) [1,5] Halle un intervalo de confianza al 97.5% para estimar la proporción de estudiantes que piensan elegir esa materia optativa.

b) [1] Si en otra muestra la proporción de estudiantes que piensa elegir esa materia es de 0.5 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03 con un nivel de confianza del 92.5%, calcule el tamaño muestral mínimo de esa muestra.

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Una granja elabora una dieta mezclando dos tipos de pienso A y B. El pienso A aporta 2 unidades de Calcio y 1 de Hierro por cada kilogramo, mientras que el B aporta 1 de Calcio y 2 de Hierro. El coste por kilogramo tanto del pienso A como del pienso B es 1 euro por kilogramo. La dieta deberá aportar al menos 2 unidades de Calcio y 2 de Hierro.

Determine los kilogramos que se han de mezclar de cada tipo de pienso para que el coste de la dieta sea mínimo. ¿Cuál sería dicho coste? ¿Cuántas unidades de Hierro y de Calcio se administrarían a los animales con esta dieta?

EJERCICIO 2

Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad -2 \le x < 1 \\ a\,x^2 + 4x & \text{si} \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) (0.5) Calcule el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio.

b) (0.5) Para $a = -1$, compruebe si es derivable en $x = 1$.

c) (0.75) Para $a = -1$, determine los extremos relativos de la función y el valor de la función en dichos extremos.

d) (0.75) Para $a = -1$, represente gráficamente la función en su dominio.

EJERCICIO 3

En una localidad andaluza hay tres institutos de ESO. De los 500 estudiantes que cursan 1o de ESO en dicha localidad, 250 están matriculados en el instituto A, 150 en el B y el resto están matriculados en el instituto C. Se sabe que han superado la materia de Matemáticas el 70 % del alumnado de 1o de ESO matriculado en el instituto A, el 68 % de B y el 73 % de C. Se elige al azar un estudiante de 1o de ESO de la citada localidad.

a) [1] Calcule la probabilidad de que no haya superado Matemáticas.

b) [1] Calcule la probabilidad de que esté matriculado en el instituto A, sabiendo que ha superado Matemáticas.

c) [0,5] Calcule la probabilidad de que esté matriculado en el instituto C y no haya superado Matemáticas.

EJERCICIO 4

A la salida de una heladería se realizó una encuesta para comprobar si los clientes habían probado un nuevo sabor en promoción. Se observó que de 125 personas encuestadas, 20 no lo habían probado y el resto sí.

a) [1,5] Determine, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para estimar la proporción de clientes de esa heladería que no habían probado el nuevo helado.

b) [1] Mediante una nueva muestra se desea estimar la proporción de clientes de esa heladería que no habían probado el nuevo helado, con un error inferior al 5% y un nivel de confianza del 94%. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra?

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [2] Resuelva la ecuación matricial $A^4 \cdot X = B^2 + \mathrm{I}_2$.

b) [0,5] ¿Tiene inversa la matriz C ? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 2

a) [1,5] Estudie la continuidad y derivabilidad de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

b) [1] Dada la función $g\left(x\right) = x^3 + bx^2 + c$, calcule los valores de b y c sabiendo que g tiene un extremo relativo en $x = -1$ y que su gráfica pasa por el punto $(-1\,, 3)$.

EJERCICIO 3

El 70% de los taxistas de una ciudad tiene 40 años o más y de estos, el 60% es propietario de la licencia del vehículo. Sin embargo, en el caso de los menores de 40 años, son propietarios de la licencia el 23%. Se escoge al azar un taxista de esa ciudad.

a) [1] Calcule la probabilidad de que sea propietario de la licencia del vehículo.

b) [1] Sabiendo que no es propietario de la licencia, calcule la probabilidad de que tenga 40 años o más.

c) [0,5] Calcule la probabilidad de que sea propietario de la licencia o tenga menos de 40 años.

EJERCICIO 4

La vida útil de los filtros de las máquinas de agua por ósmosis se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 2000 horas. En una prueba realizada en 9 máquinas elegidas al azar, se obtuvieron los siguientes resultados:

9 500   10 000   8 500   10 500   16 500   10 000   12 000   14 000   17 000

a) [1,5] Calcule un intervalo de confianza al 99 % para la vida útil media de los filtros de las máquinas.

b) [1] ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo que debería tener una muestra, para que el error cometido en la estimación de la vida útil media de los filtros sea inferior a 500 horas, con un nivel de confianza del 95%?

Modelo 5 (J)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un bene#cio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x) = x^3 - 9x + 2$$

a) [1] Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a su gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) [1] Estudie la monotonía y la curvatura de la función f .

c) [0,5] Calcule $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

EJERCICIO 3

El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) [1,5] ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) [1] Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

EJERCICIO 4

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) [1,5] Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad.

b) [1] Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

Modelo 5 (J)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Razone si la matriz A es simétrica.

b) [1] Calcule A^{-1}.

c) [1] Resuelva la ecuación matricial

$$2X \cdot A - A^2 - 3\,\mathrm{I}_3 = \mathrm{O}$$

EJERCICIO 2

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1] Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) [1,5] Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

EJERCICIO 3

El 69% de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) [0,75] Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) [1]Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) [0,75] ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

EJERCICIO 4

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) [1,5] Determine un intervalo de confianza al 92% para la media poblacional.

b) [1] Con una confianza del 95.5%, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos?

Modelo 6 (S)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) [1] Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
2. $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por

$$C\,(x) = 2\,(2x-1)^2 + 1 \ , \ 0 \leq x \leq 2$$

donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) [1] Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C\,(x)$.

b) [0,75] Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo.¿Cuál es dicho coste?

c) [0,75] Realice un esbozo de la gráfica de la función $C\,(x)$.

EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25% de su producción, el B el 40% y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) [1]Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) [0,5] Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) [1] Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) [1,5] Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

b) [1] Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

Modelo 6 (S)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) [1,75] Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) [0,25] Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) [0,5] Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

De una cierta función f , sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) [1] Estudie los intervalos de monotonía de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) [0,75] Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) [0,75] Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1\,,3)$.

EJERCICIO 3

De dos sucesos *A* y *B* de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$\mathrm{p}\,(A\cap B)=0.2\ ,\ \mathrm{p}\,(A\cup B)=0.4\ ,\ \mathrm{p}\,(A/B)=0.8$$

a) [1,2] Calcule $\mathrm{p}\,(B)$ y $\mathrm{p}\,(A)$.

b) [0,5]¿Son los sucesos *A* y *B* independientes? Razone la respuesta.

c) [0,8] Calcule $\mathrm{p}\,(A^c\cup B^c)$.

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) [1,5] Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) [1] Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3%.