TEMA 8

Muestreo e Inferencia Estadística

Ejercicios para Selectividad
de
Muestreo e Inferencia

Detalladamente
resueltos

Curso
1998 / 1999

©José Álvarez Fajardo bajo una licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons

Enunciados

1. [S/99] En una población, una variable aleatoria es normal de media desconocida y desviación típica 20.

a) Si de una muestra de tamaño 25 se ha observado que la media es 2.743, determine un intervalo, con el 90% de confianza, para la media de la población.

b) Elegida una muestra, su media ha sido 2.740; se ha construido un intervalo de confianza, al 95%, que ha resultado ser (2.736´08 , 2.743´92). ¿Cuál era el tamaño de la muestra?

2. [S/99] El tiempo de vida de un insecto sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica 25 días. Para estimar la vida media se hace un seguimiento a la duración de la vida de una muestra de n insectos. Calcule el valor de n para que el intervalo de confianza de esta media, con un nivel de confianza del 95%, tenga una amplitud como máximo de 5 días.

3. [S/99] Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuye según una ley normal con $\sigma = 90.000$ "*Pta*" En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 466.300 y 583.900 Pta.

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos 9 meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza de ese intervalo?

4. [S/99] La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1'75 metros. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0'16\ m^2$.

a) Construya un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm. de la media muestral, con una confianza del 90%?

5. [S/99] Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cc.

a) Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para que el nivel de glucosa en sangre de la población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

6. [S/99] La media de edad de los alumnos que se presentan alas pruebas de acceso a la Universidad es de 18'1 años y la desviación típica 0'6 años.

a) De los alumnos anteriores se elige, al alzar, una muestra de 100, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17'9 y 18'2 años?

b) ¿Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17'9 y 18'3 años, con una confianza del 99'5%?

7. [S/99]Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es 90 horas. Tomada una muestra de tamaño 100 se ha encontrado que la media de la duración de las bombillas ha sido 1.200 horas. Determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la duración media de las bombillas.

© *José Álvarez Fajardo*

8. [S/99] Sea un conjunto de 4 bolas, marcadas con los números $1, 3, 5$ y 7.

a) Escriba todas las muestras de tamaño 2 que podrían formarse con esas bolas si el muestreo se hace sin reposición. Calcule también las medias de los números de cada muestra y halle la media de todas esas muestras.

b) Ídem pero suponiendo que el muestreo se hace con reemplazamiento.

9. [S/99]Al calificar los exámenes de un numeroso grupo de opositores, se ha visto que sus puntuaciones siguen una distribución normal con una media de 72 puntos y una desviación típica de 9 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 16 de esos opositores, elegidos al azar, se obtenga una puntuación media superior a 78 puntos?

10. [S/99]El tiempo que permanece cada paciente en la consulta del médico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 minutos.

Se ha tomado una muestra aleatoria de 256 pacientes de este médico y se ha encontrado que su tiempo medio de consulta ha sido de 10 minutos. ¿Cuál es el intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el tiempo medio de consulta que se deduce que esta muestra?

11. [S/99]Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica $0'15$ segundos.

Observada una muestra de tamaño 9, se ha obtenido una media muestral de $0'85$ segundos.

a) Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 99%.

b) ¿Con qué nivel de confianza se debería construir un intervalo para la media de manera que los límites de dicho intervalo fuesen $0'768$ y $0'932$?

12. [S/99]En un colegio hay 2.000 alumnos distribuidos en 5 cursos así: 400 en 1^{er} curso, 380 en 2^{o}, 520 en 3^{o}, 360 en 4^{o} y 340 en 5^{o}.

Se quiere seleccionar una muestra de 100 alumnos, utilizando la técnica de muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional y considerando cada curso como un estrato. ¿Cómo se seleccionaría dicha muestra

© *José Álvarez Fajardo*

Soluciones

1. La v. a. X es normal con $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 20 \end{array} \right.$

a) Muestra de tamaño: $n = 25$

Media muestral : $\bar{x} = 2\,743$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'90$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'645$

El intervalo de confianza es:

$$I = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(2743 - 1'645 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}, 2743 + 1'645 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} \right) = (2736'42, 2749'58)$$

b) Muestra de tamaño: $n = ¿?$

Media muestral : $\bar{x} = 2740$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'95$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'96$

El intervalo de confianza es: $I = (2736'08, 2743'92)$

Del intervalo de confianza obtenemos:

$$2743'92 = 2740 + 1'96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \underset{despejando}{\rightarrow} n \approx \left(\frac{1'96 \cdot 20}{2743'92 - 2740} \right)^2 \rightarrow n = 100$$

2. La v. a. X = "tiempo de vida" es normal con $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 25 \end{array} \right.$

Muestra de tamaño: $n = ¿?$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'95$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'96$

Error máximo admisible $E_{máx} = \frac{5}{2} = 2'5$

Del error máximo obtendremos n:

$$E_{máx} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 2'5 = 1'96 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = \rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 25}{2'5} \right)^2 = 384'16$$

Tenemos así que n debe ser mayor que 384.

© *José Álvarez Fajardo*

3. La v. a. X = “ventas mensuales” es normal con $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 90000 \end{array} \right.$

Muestra de tamaño: $n = 9$

El intervalo de confianza es: $I = (466\,300 , 583\,900)$

a) Media muestral: $\bar{x} = ¿?$

La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza:

$$\bar{x} = \frac{466300 + 583900}{2} = 525\,100 \text{ (pta)}$$

b) Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = ¿?$

Obtendremos el valor crítico primero, a partir del intervalo de confianza:

$$583\,900 = \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \underset{despejando}{\rightarrow} z_{\alpha/2} = \frac{583900 - 52100}{90000} \cdot 3 = 1'96$$

Ahora ya podemos obtener de la tabla de la distribución normal tipificada el nivel de confianza:

$$z_{\alpha/2} = 1'96 \;\rightarrow\; p = 1 - \alpha = 0'95$$

El nivel de confianza es del 95%.

4. La v. a. X = “estaturas en una ciudad” es normal con $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 0'4 \end{array} \right.$

Muestra de tamaño: $n = 400$

Media muestral: $\bar{x} = 1'75$

a) Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'95$ $\rightarrow$ Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'96$

El intervalo de confianza es:

$$I = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(1'75 - 1'96 \cdot \frac{0'4}{\sqrt{100}} , 1'75 - 1'96 \cdot \frac{0'4}{\sqrt{100}} \right) = (1'71 , 1'79)$$

b) Muestra de tamaño: $n = ¿?$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'90$ $\rightarrow$ Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'645$

Error máximo admisible $E_{máx} = 2 \text{ cm} = 0'02$

Del error máximo obtendremos n:

$$E_{máx} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; 0'02 = 1'645 \cdot \frac{0'4}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; n = \left(\frac{1'645 \cdot 0'4}{0'02} \right)^2 = 1\,082'41$$

Tenemos así que n debe ser mayor que 1.082 personas.

© *José Álvarez Fajardo*

5. La v. a. X = "nivel de glucosa en sangre" tiene $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 20 \end{array} \right.$

Muestra de tamaño: $n = 100$ (como $n > 30$, la distribución $\overline{X}$ es casi normal)

Media muestral: $\overline{x} = 110$

a) Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'90$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'645$

El intervalo de confianza es:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(110 - 1'645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 110 + 1'645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \right) = (106'71, 113'29)$$

b) Error máximo admisible: $E_{máx} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3'29$

6. La v. a. X = "edad de los alumnos" tiene $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 0'6 \end{array} \right.$

a) Como $n = 100 > 30$, la distribución $\overline{X}$ es casi normal con $\left| \begin{array}{l} \overline{\mu} = 18'1 \\ \overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'06 \end{array} \right.$

$$p(17'9 < \overline{X} < 18'2) = p(-3'33 < Z < 1'67) = p(Z < 1'67) - [1 - p(Z < 3'33)] = 0'95207$$

b) Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'995$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 2'81$

El intervalo de confianza es: $I = (18'3, 17'9)$

La longitud del intervalo es: $L = 18'3 - 17'9 = 0'4$ → $E_{máx} = \frac{L}{2} = 0'2$

Del error máximo obtenemos el tamaño muestral (n):

$$0'2 = 2'81 \cdot \frac{0'6}{\sqrt{n}} \underset{despejando}{\rightarrow} n \approx \left(\frac{2'81 \cdot 0'6}{0'2} \right)^2 \rightarrow n = 71$$

7. La v. a. X = "duración de las bombillas" tiene $\left| \begin{array}{l} \mu = ¿? \\ \sigma = 90 \end{array} \right.$

Muestra de tamaño: $n = 100$ (como $n > 30$, la distribución $\overline{X}$ es casi normal)

Media muestral: $\overline{x} = 1200$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'95$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'96$

El intervalo de confianza es:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(1200 - 1'96 \cdot \frac{90}{\sqrt{100}}, 1200 + 1'96 \cdot \frac{90}{\sqrt{100}} \right) = (1\,182'36, 1\,017'64)$$

© *José Álvarez Fajardo*

8.

a) El conjunto de todas las muestras de tamaño $n=2$ sin reemplazamiento es:

$$M=\begin{Bmatrix}(1,3),(1,5),(1,7)\\(3,1),(3,5),(3,7)\\(5,1),(5,3),(5,7)\\(7,1),(7,3),(7,5)\end{Bmatrix}$$

La distribución de las medias muestrales es:

$$\overline{X}=\{2,3,4,2,4,5,3,4,6,4,5,6\}$$

Su media es

$$\overline{\mu}=\mu=4$$

b) El conjunto de todas las muestras de tamaño $n=2$ con reemplazamiento es:

$$M'=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,3),(1,5),(1,7)\\(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\\(5,1),(5,3),(5,5),(5,7)\\(7,1),(7,3),(7,5),(7,7)\end{Bmatrix}$$

La distribución de las medias muestrales es:

$$\overline{X'}=\{1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 7\}$$

Su media es

$$\overline{\mu'}=\mu=4$$

9. La v. a. X = "puntuación en unas oposiciones" es normal con $\left|\begin{array}{l}\mu=72\\ \sigma=9\end{array}\right.$

Muestra de tamaño: $n=16$

$\overline{X}$ es normal con $\left|\begin{array}{l}\overline{\mu}=18'1\\ \overline{\sigma}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0'06\end{array}\right.$

La probabilidad pedida es:

$$p(\overline{X}>78)=p\left(Z>\frac{78-72}{2'25}\right)=p(Z>2'67)=1-p(Z<2'67)=0'0038$$

© José Álvarez Fajardo

10. La v. a. X = "tiempo de permanencia" es normal con $\begin{vmatrix} \mu = ¿? \\ \sigma = 4 \end{vmatrix}$

Muestra de tamaño: $n = 256$

Media muestral: $\overline{x} = 10$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'95$ $\rightarrow$ Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 1'96$

El intervalo de confianza es:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(10 - 1'96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}, 10 + 1'96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}} \right) = (9'51, 10'49)$$

11. La v. a. X = "tiempo de reacción a un determinado estímulo" es normal con $\begin{vmatrix} \mu = ¿? \\ \sigma = 0'15 \end{vmatrix}$

Muestra de tamaño: $n = 9$

Media muestral: $\overline{x} = 0'85$

a) Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0'99$ $\rightarrow$ $\rightarrow$Valor crítico: $z_{\alpha/2} = 2'575$

El intervalo de confianza es:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (0'021, 0'279)$$

b) Muestra de tamaño: $n = 9$

El intervalo de confianza es: $I = (0'768, 0'932)$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = ¿?$

Obtendremos el valor crítico, para ello calculamos primero el error máximo:

$$L = 0'932 - 0'768 = 0'164 \rightarrow E_{máx} = L : 2 = 0'082$$

Ahora despejamos de la fórmula del error máximo el valor crítico:

$$0'082 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0'15}{\sqrt{9}} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'64$$

Ahora ya podemos obtener de la tabla de la distribución normal tipificada el nivel de confianza:

$$p\left(z > z_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = p(z > 1'64) = 0'0505 \rightarrow \alpha = 0'101 \rightarrow p = 1 - \alpha = 0'889$$

El nivel de confianza es

89´9% ≈ 90%.

© *José Álvarez Fajardo*

12. Realizaríamos un muestreo aleatorio estratificado: debemos mantener en la muestra la proporción que guarda cada estrato en la población.

Así, por ejemplo:

$$N^o\ alumnos\ de\ 1^o\ en\ muestra = \frac{N^o\ alumnos\ de\ 1^o\ en\ la\ población}{Tamaño\ de\ la\ población} \cdot Tamaño\ de\ la\ muestra = \frac{400}{2000} \cdot 100 = 20$$

La siguiente tabla nos muestra la composición de la muestra:

	1º	***2º***	***3º***	***4º***	***5º***	
Población	400	380	520	360	340	$\sum$= 2.000
Muestra	20	19	26	18	17	$\sum$= 100

A continuación elegiremos de forma aleatoria simple, en cada estrato, el número de individuos arriba indicados.

© José Álvarez Fajardo