TEMA 5

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ejercicios para Selectividad
de
Aplicaciones de las Derivadas

Detalladamente
resueltos

Curso
2000 / 2001

Enunciados

1. [S/01] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

a) Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

2. [S/01] Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función

$$f(x)=\frac{50x-100}{2x+5} \quad , \quad x\geq 0$$

donde x representa los años de vida de la empresa.

a) Represente gráficamente la función $y=f(x)$ para $x\in(-\infty,+\infty)$, indicando dominio, cortes con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

b) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

3. [S/01]Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2-x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$.

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad.

c) Obtenga, si existe, la derivada de f en los puntos $x=1/2$, $x=-1/2$ y $x=0$.

d) Indique si posee máximos y mínimos relativos y en qué puntos.

4. [S/01] El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de pesetas produce una ganancia de $f(x)$ millones de pts, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 5 \\ \dfrac{5}{2x} & \text{si} \quad x>5 \end{cases}.$$

a) Represente la función $f(x)$.

b) Halle la inversión que produce máxima ganancia.

c) Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula.

d) Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

5. [S/01]

a) Dada la función $f(x)=x^3+bx+c$, determine los valores de *"b"* y *"c"* sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto (–1 , 3).

b) Calcule "*a*" para que el valor mínimo de la función $g(x)=x^2+2x+a$ sea igual a 8.

6. [S/01]Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "*h*" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "*t*" (en segundos) viene dada por la expresión:

$$h(t)=-5t^2+40t$$

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

b) Represente gráficamente la función $h(t)$.

c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

d) ¿En qué instante llega al suelo?

7. [S/01] La gráfica de la función derivada de una función $f(x)$ es una parábola de vértice $(1,-4)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$. A partir de la gráfica de f':

a) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de f. ¿Para qué valores de x se alcanzan los máximos y mínimos relativos?

b) Esboce la forma de la gráfica de una función cuya derivada sea la parábola dada.

8. [S/01] El consumo de luz (en miles de pesetas) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido, nos viene dado por la expresión:

$$f(t)=-\frac{1}{5}t^2+2t+10 \quad , \quad 0\le t\le 12$$

a) ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?

b) ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?

c) Represente gráficamente la función.

9. [S/01] Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "*x*" euros, su beneficio diario, en euros, será:

$$B(x)=-10x^2+100x-210$$

a) Represente la función precio–beneficio.

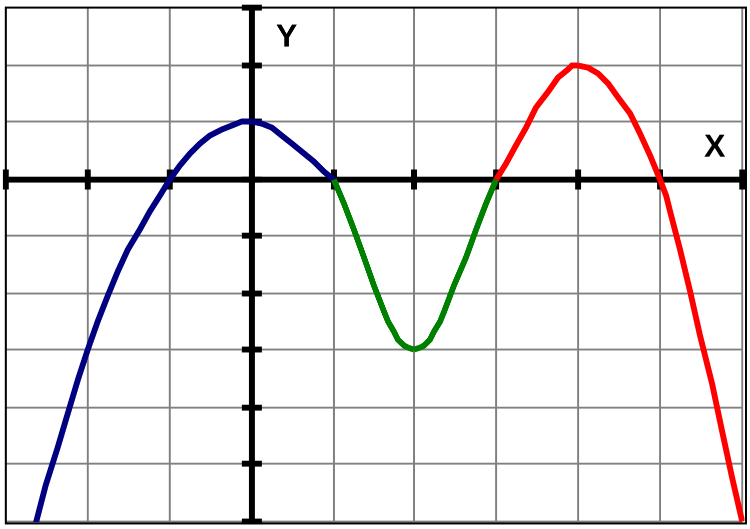
b) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?

c) Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

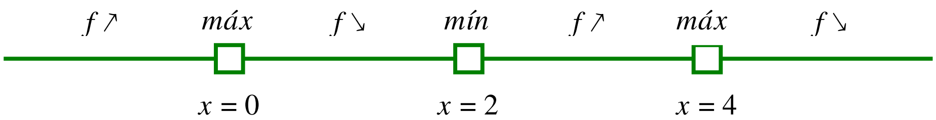
Soluciones

1.

a) Su gráfica está compuesta de tres trozos de parábolas. La de la izquierda tiene su vértice para $x = 0$, la del medio para $x = 2$ y la de la derecha para $x = 4$. Con unas tablas de valores obtenemos:



b) <u>Monotonía</u>: el siguiente esquema resume los intervalos de crecimiento–decrecimiento:



<u>Extremos</u>:

máximos: para $x = 0$ hay un máximo relativo: $A=(0,1)$

para $x = 4$ hay un máximo absoluto: $C=(4,2)$

mínimos: para $x = 2$ hay un mínimo relativo: $B=(2,-3)$

no hay mínimo absoluto al no estar acotada inferiormente

c) Apreciamos en la gráfica que es continua en todo punto. Aún así, estudiemos analíticamente:

<u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x = 1$ y $x = 3$:

$\boxed{x=1}$

VALOR: si $x=1$ es $y=0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=1-x^2\to 0 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=3x^2-12x+9\to 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 1$.

$\boxed{x=3}$

VALOR: si $x=3$ es $y=0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 3- \quad \text{es} \quad y=3x^2-12x+9\to 0 \\ \text{si} \quad x\to 3+ \quad \text{es} \quad y=-2x^2+16x-30\to 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 3$.

<u>Derivabilidad</u>: directamente

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} & x<1 \\ 6x-12 & \text{si} & 1<x<3 \\ -4x+16 & \text{si} & x>3 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$\boxed{x=1}$

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y'=-2x\to -2 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y'=6x-12\to -6 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un punto *anguloso*).

$\boxed{x=2}$

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 3- \quad \text{es} \quad y'=6x-12\to 6 \\ \text{si} \quad x\to 3+ \quad \text{es} \quad y'=-4x+16\to 4 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un punto *anguloso*).

2.

a) Veamos esa gráfica.

<u>Dominio</u>: $D=\mathbb{R}-\{-2{,}5\}$

<u>Cortes</u>: Eje **Y** : $x = 0 \to y = -20$

Eje **X** : $y = 0 \to x = 2$

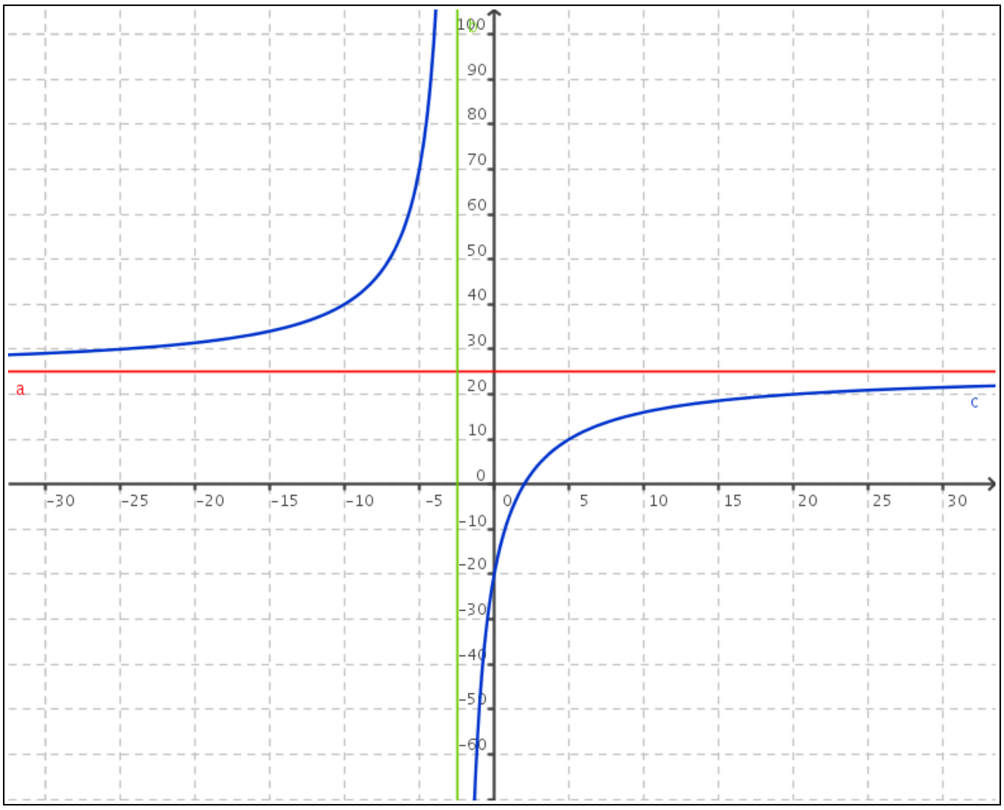
<u>Asíntotas</u>: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{50}{2}=25$ $\to$ $y = 25$ asíntota horizontal

$\lim_{x\to -2{,}5} f(x)=\left[\frac{-225}{0}\right]=\pm\infty$ $\to$ $x = -2'5$ asíntota vertical

<u>Monotonía</u>: $f'(x)=\frac{450}{(2x+5)^2}$

Como vemos, la derivada nunca es negativa, es por ello que f es creciente en su dominio.

<u>Gráfica</u>:

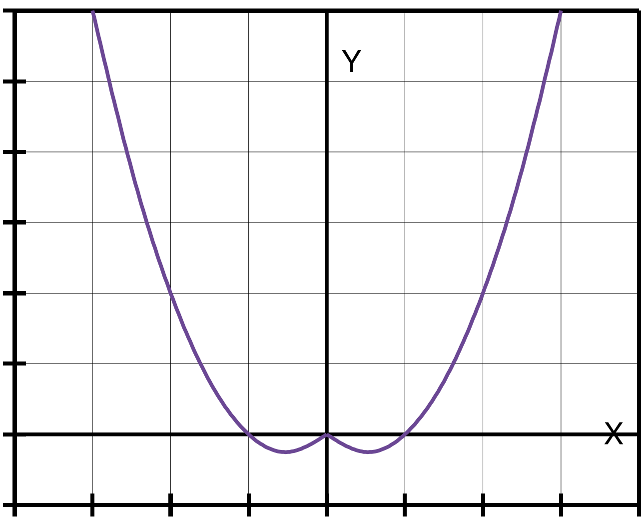


b) Observamos en la gráfica que $y > 0$ cuando $x > 2$, lo que nos indica que es a partir de los 2 años.

c) Sí, están limitados por 25 millones ($y = 25$), y ya hemos visto que si $x \to +\infty$ es $y \to 25$.

3.

a) La gráfica está compuesta por dos trozos de parábolas, con vértices para $x = -0{,}5$ y $x = 0{,}5$, respectivamente. Con unas tablas de valores:



b) En la gráfica apreciamos que es continua en todo punto. Aún así, estudiemos analíticamente:

Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (punto de conexión de las parábolas):

$\boxed{x=0}$

VALOR: si $x=0$ es $y=0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y=x^2+x\to 0 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y=x^2-x\to 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

c) Como f está formada por trozos de funciones derivables, es derivable para $x \neq 0$. Directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Eso significa que

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{-1}{2}+1=0 \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

Veamos ahora detenidamente en

$\boxed{x=0}$

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y'=2x+1\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y'=2x-1\to -1 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un punto *anguloso*).

d) máximo: para $x = 0$ hay un máximo relativo: $A=(0,0)$

no hay máximo absoluto al no estar acotada inferiormente

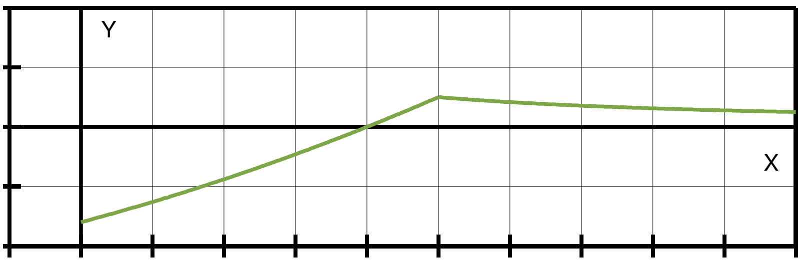
mínimos: para $x=-0,5$ y $x=0,5$ hay sendos mínimos relativos, que son absolutos:

$B=(-0,5,-0,25)$ y $C=(0,5,-0,25)$.

4.

a) La gráfica se compone de un trozo de parábola y de un trozo de curva (*hipérbola*). La parábola tendría su vértice para $x_V=-\dfrac{b}{2a}=-16$.

Con unas tablas de valores adecuadas obtenemos:



b) En la gráfica observamos que el máximo absoluto corresponde al punto $M=(5,0{,}5)$.

Ello significa que la máxima ganancia es de medio millón de pesetas, que se obtiene para una inversión de cinco millones.

c) Si $x = 4$ es $y = 0$: una inversión de 4 millones produce ganancia nula.

d) Observemos que si $x\to+\infty$ es $y\to 0$, así resulta que si la inversión se incrementa indefinidamente el beneficio tiende a anularse.

5.

a) Observemos antes de nada que es:

$$f(x)=x^3+bx+c \quad\to\quad f'(x)=3x^2+b$$

Tenemos que se verifica:

Si $x=-1$ es $y=3$ $\quad\to\quad$ $3=-1-b+c$

Si $x=-1$ es $y'=0$ $\quad\to\quad$ $0=3+b$

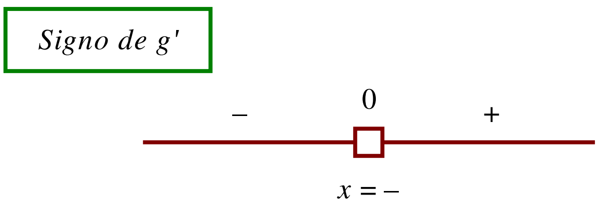
Resolviendo el sistema resultante obtenemos:

$$b=-3\ ,\ c=1$$

b) Ante todo:

$$g(x)=x^2+2x+a \quad\to\quad g'(x)=2x+2$$

Estudiamos el signo de la derivada:



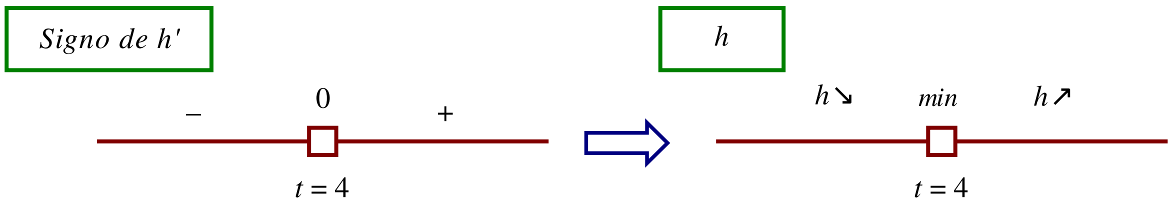
Como vemos, para $x=-1$ se alcanza el valor mínimo de g. Así:

$$y_{min}=8 \ \text{ si } \ x=-1$$

Sustituyendo: $8=1-2+a \ \to\ a=8-1+2 \ \to\ a=9$

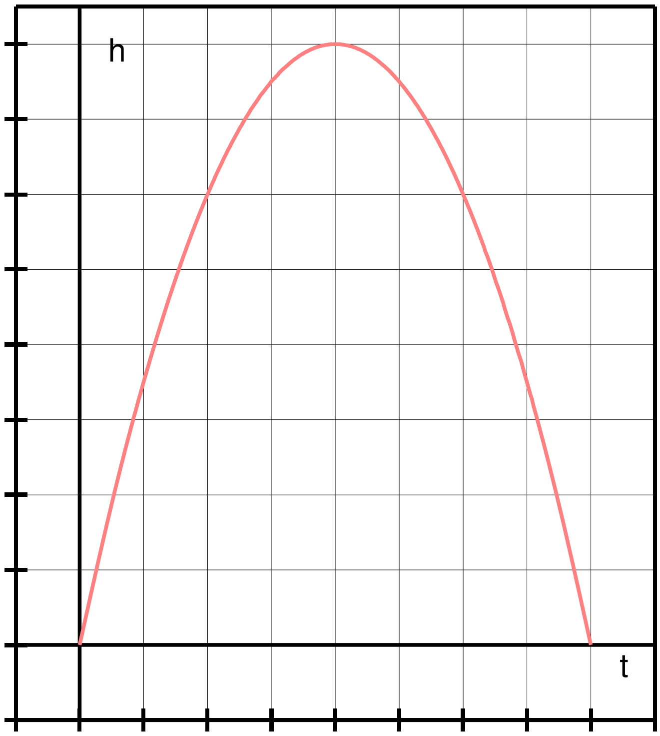
6.

a) Podemos averiguarlo estudiando la monotonía a través de la derivada: $h'(t)=-10t+40$



Vemos que la altura máxima se alcanza cuando $t=4\ s$, y es $h=-5\cdot 4^2+40\cdot 4=80\ m$

b) La gráfica es una parábola ($t \geq 0$) con vértice para $t = 4$. Con una tabla de valores adecuada:

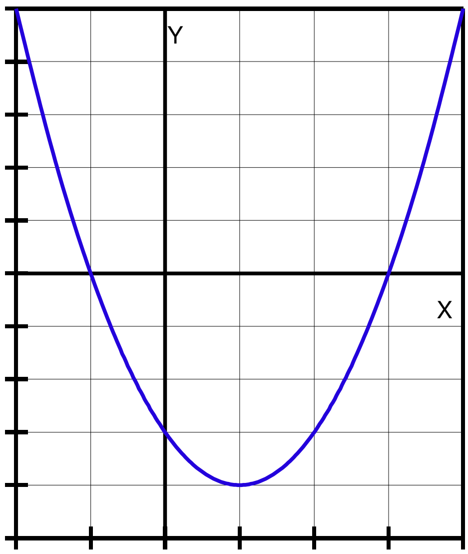


c) En la misma gráfica podemos observar que $h = 60\ m$ para $t = 2\ s$ y para $t = 6\ s$.

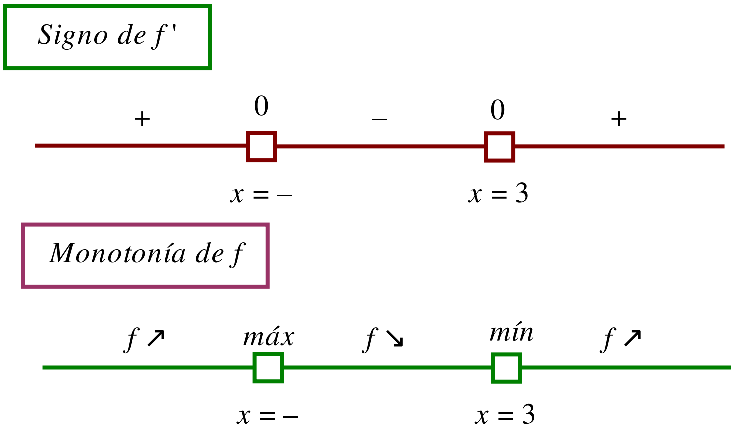
d) Llega al suelo cuando vuelve a ser $h = 0$. Esto ocurre para $t = 8\ s$.

7.

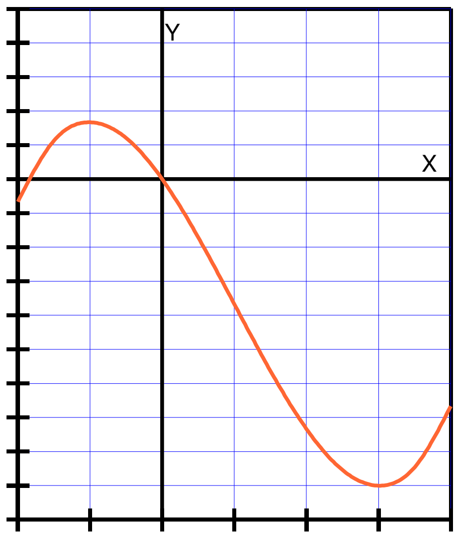
a) Un esbozo de la gráfica de $f\,'$ sería:



b) Podemos realizar un estudio de signo de signo de la derivada y obtener:

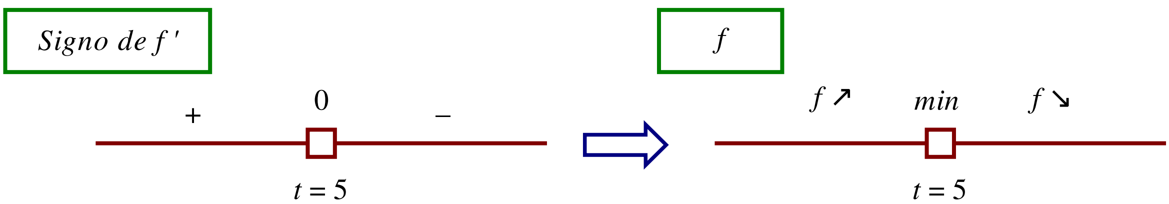


c) Teniendo en cuenta el apartado anterior, una posibilidad sería:



8.

a) Podemos averiguarlo estudiando la monotonía a través de la derivada: $f'(t) = -0{,}4t + 2$



El consumo se incrementa desde las cero hasta las cinco horas, y disminuye desde este momento hasta las 12 horas.

b) Con un esquema de variación:

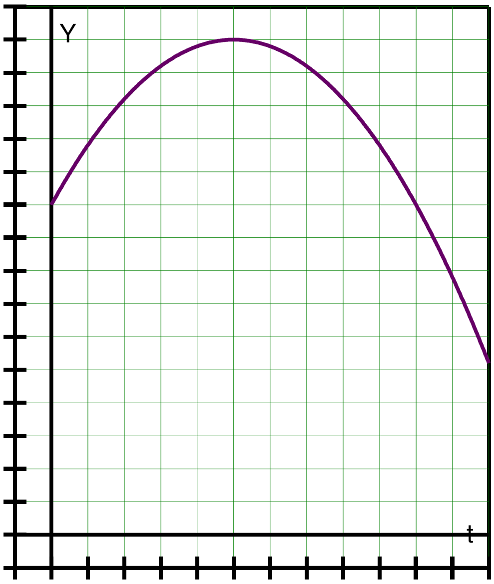
t	0		5		12
f	10	↗	15	↘	5,2

Ahí vemos claramente:

$max\, f = 15\,000\ pts$ para $t = 5\ s$

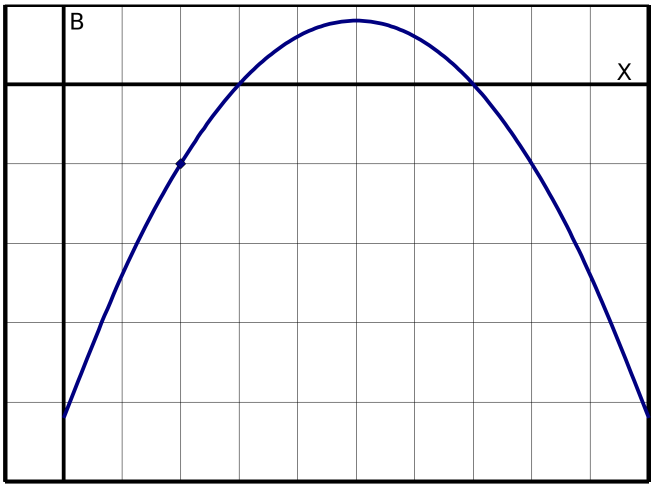
$min\, f = 5\,200\ pts$ para $t = 12\ s$

c) La gráfica es una parábola ($t \geq 0$) con vértice para $t = 5$. Con una tabla de valores adecuada:



9.

a) Es una parábola con vértice en $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-20} = 50$. Con una tabla de valores alrededor del vértice tenemos:



b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $B_{max} = 40$ € para $x = 5$ €

c) Hay beneficios cuando $B > 0$ (sobre el eje X) y pérdidas cuando $B < 0$ (bajo el eje X). De la gráfica tenemos entonces que obtiene pérdidas cuando el precio es menor de 3 € o mayor de 7 €.