

Nombre: _____

Repaso de funciones de 1º

- x Ejercicio 1: En un experimento que dura cinco horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = t^2 - 4t \quad , \quad 0 \leq t \leq 5$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

- ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?
- Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.
- ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?
- Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.
- Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.
- Construye un esquema de variación de la función.

- x Ejercicio 2: Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Dibuja su gráfica.
- Estudia su continuidad.
- ¿Cuál es la tendencia de la función cuando $x \rightarrow +\infty$? ¿Y cuando $x \rightarrow -\infty$?

- x Ejercicio 3: Considera las funciones siguientes:

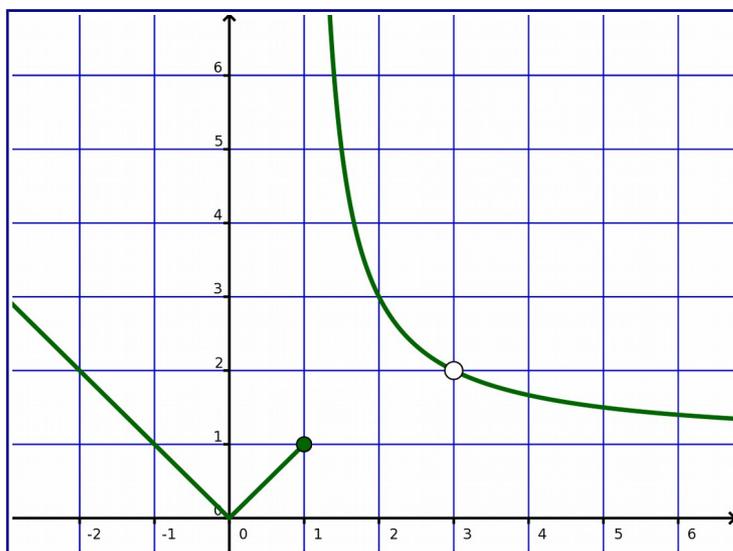
$$f(x) = x + 1 \quad , \quad g(x) = \sqrt{2x - 4} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$$

- Calcula $(f - h)(0)$ y $(f \circ g)(2)$
- Halla $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ y su dominio.
- Obtén $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

Nombre: _____

Repaso de funciones de 1º

x Ejercicio 4: La gráfica de la función $y=f(x)$ es la mostrada a continuación:



- Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.
- Indica las tendencias de la función para $x \rightarrow \pm\infty$.
- ¿Qué asíntotas tiene la curva?

x Ejercicio 5: Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calcula los límites de $f(x)$ para $x \rightarrow \pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?
- Razona cuál es el único punto en el que la función f puede ser discontinua. Estudia algebraicamente la continuidad en él.
- Dibuja su gráfica y compruébalo.

x Ejercicio 6: Sea

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x}$$

- Calcula los límites de $f(x)$ para $x \rightarrow \pm\infty$.
- Calcula las tendencias de la función para $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 4$.
- Estudia la continuidad de la función.
- ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

x Ejercicio 1:

a) Hacemos $t=0 \rightarrow T_i=-3$:

Al inicio del experimento la temperatura es de tres grados bajo cero.

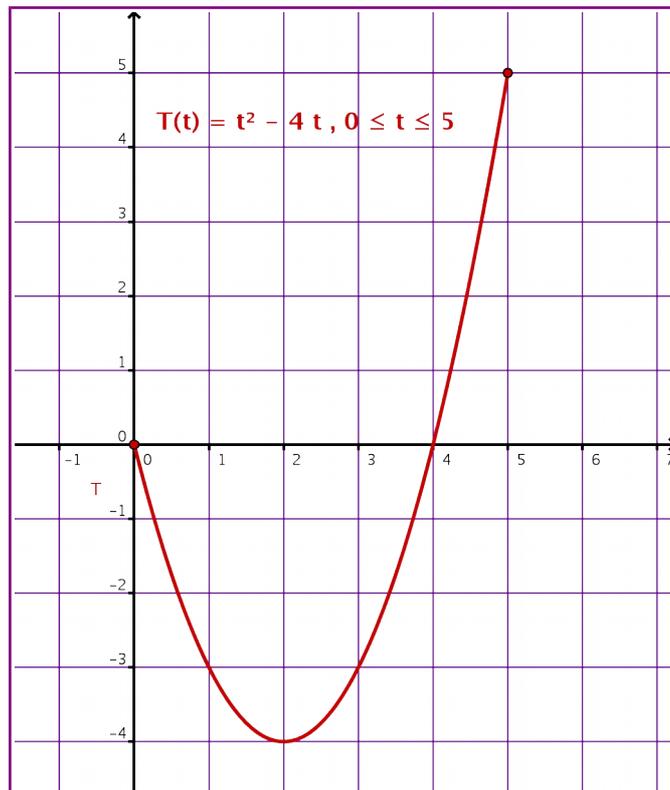
Haciendo $t=5 \rightarrow T=5$:

Al final de la experiencia la temperatura es de cinco grados.

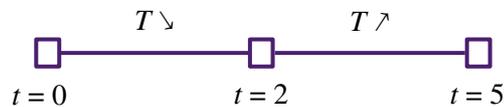
b) La gráfica será un trozo de parábola, cuyo vértice se encuentra cuando $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

t	0	1	2	3	4	5
T	0	-3	-4	-3	0	5

Con la anterior tabla de valores:



c) En el siguiente esquema mostramos cuándo aumenta o disminuye la temperatura:

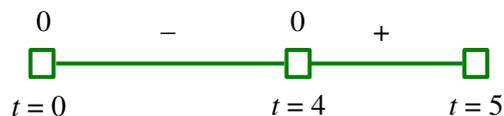


d) Las temperaturas extremas son:

$$T_{max} = 5^{\circ}\text{C} \text{ que se alcanza para } t = 5 \text{ h.}$$

$$T_{min} = -4^{\circ}\text{C} \text{ que se alcanza para } t = 2 \text{ h.}$$

e) En el esquema siguiente señalamos cuándo la temperatura está sobre cero (+) y bajo cero (-):

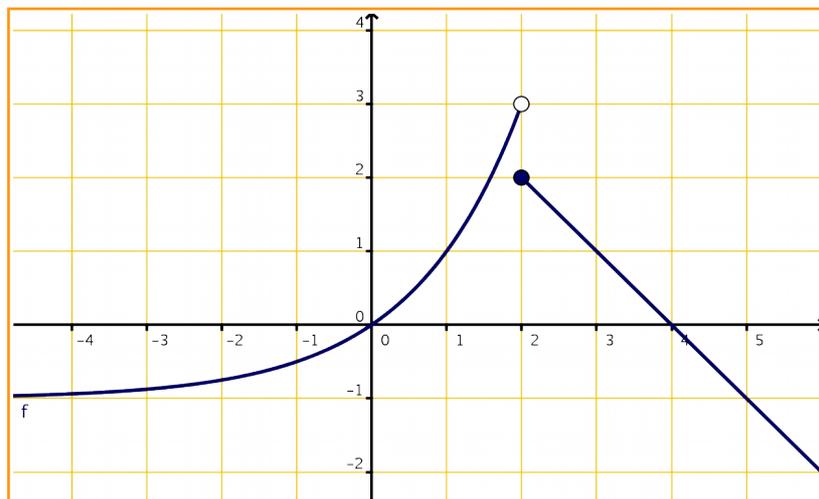


f) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		2		5
T	0	\searrow	-4	\nearrow	5

x Ejercicio 2:

a) La gráfica se compondrá de un trozo de curva exponencial para $x < 2$, así como de un trozo de recta para $x \geq 2$. Con unas tablas de valores adecuadas:



b) Apreciamos en la gráfica que la función es continua en todo punto excepto para $x = 2$, donde hay una discontinuidad de salto finito.

c) Si prolongamos hacia la izquierda, la gráfica se aproxima a la cuadrícula horizontal $y = -1$:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y \rightarrow -1$$

Si prolongamos hacia la derecha, la gráfica se va hacia abajo:

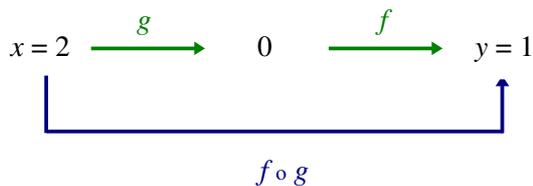
$$\text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y \rightarrow -\infty$$

x Ejercicio 3:

a) $(f-h)(0) = f(0) - h(0) = 1 - 3 = -2$

$$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(0) = 0 + 1 = 1$$

El esquema de esta composición es:



b) La fórmula que define el cociente es:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{x-3}{x-1} : (x+1) = \frac{x-3}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x-3}{x^2-1}$$

El denominador no puede ser cero:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Así:

$$D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

c) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x+1) = \sqrt{2(x+1)-4} = \sqrt{2x-2}$$

El radicando no puede ser negativo:

$$2x-2 \geq 0$$

Resolviendo la inecuación:

$$D = [1, +\infty)$$

x Ejercicio 4:

a) La función es continua en todo punto excepto en $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y en $x = 3$ (discontinuidad evitable o de agujero). Veamos los valores y las tendencias en esas discontinuidades:

$x=1$	VALOR:	si $x=1$ es $y=1$
	TENDENCIAS:	$\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 1- & \text{es } y \rightarrow 1 \\ \text{si } x \rightarrow 1+ & \text{es } y \rightarrow +\infty \end{cases}$
$x=3$	VALOR:	si $x=1$ es $y=\text{No existe}$
	TENDENCIAS:	$\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 3- & \text{es } y \rightarrow 2 \\ \text{si } x \rightarrow 3+ & \text{es } y \rightarrow 2 \end{cases}$

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y \rightarrow +\infty \quad \text{y} \quad \text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y \rightarrow 1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$$y = 1 \quad (\text{para } x \rightarrow +\infty)$$

Verticales:

$$x = 1 \quad (\text{pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito})$$

x Ejercicio 5:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y = x^2 + 2x \rightarrow +\infty \quad \text{pues } (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y = -x + 3 \rightarrow -\infty \quad \text{pues } -(+\infty) + 3 = -\infty$$

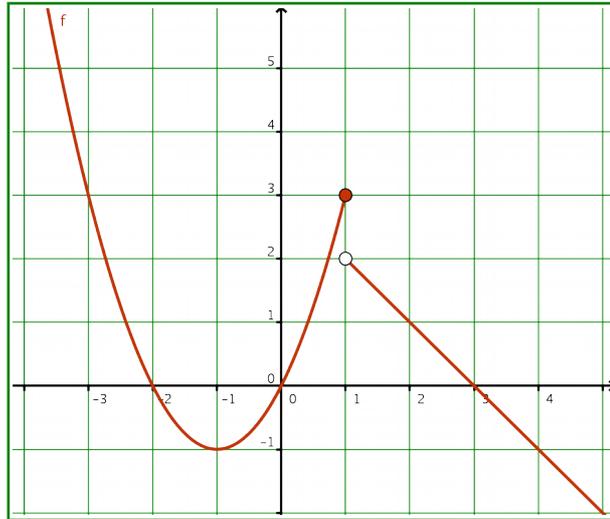
Deducimos de lo anterior que no hay asíntotas horizontales, pues la función no tiende hacia un número.

b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$, que es el punto de conexión de ambas partes.

$x=1$	VALOR:	si $x=1$ es $y=3$
	TENDENCIAS:	$\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 1- & \text{es } y = x^2 + 2x \rightarrow 3 \\ \text{si } x \rightarrow 1+ & \text{es } y = -x + 3 \rightarrow 2 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito (-1 unidad) para $x = 1$.

- c) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola (con vértice en $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$) para $x \leq 1$, así como de un trozo de recta para $x > 1$. Con unas tablas de valores adecuadas:



x Ejercicio 6:

- a) Usamos la regla de los grados: como el grado del numerador es menor que el del denominador es cero.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 4x} = 0$$

- b) La función es un cociente de polinomios: sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador:

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$$

$$x = 4$$

VALOR: si $x = 4$ es $y = \text{no existe}$

TENDENCIAS: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \left[\frac{8}{0} \right] = \pm\infty$

Concluimos que hay discontinuidad de salto infinito para $x = 4$.

$$x = 0$$

VALOR: si $x = 0$ es $y = \text{no existe}$

TENDENCIAS: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 0$

- c) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = 4$ es una asíntota vertical.