

Ejercicios para Selectividad
de
Programación Lineal

Detalladamente
resueltos

Curso
2004 / 2005



Enunciados

1.

- a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x - y \leq 1$; $x + 2y \geq 7$; $x \geq 0$; $y \leq 5$
- b) Determine los vértices de este recinto.
- c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = 2x + 4y - 5$ y en qué puntos alcanza dichos valores?

2. Sea el siguiente sistema de inecuaciones: $2x - 3y \leq 6$; $x \geq 2y - 4$; $x + y \leq 8$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

- a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.
- b) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

3.

- a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 6 ; x \leq 10 - 2y ; \frac{x}{12} + \frac{y}{3} \geq 1 ; x \geq 0$$

- b) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = 4 - 3x - 6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

4.

El estadio del Mediterráneo, construido para la celebración de los “Juegos Mediterráneos Almería 2005”, tiene una capacidad de 20000 espectadores.

Para la asistencia a estos juegos se han establecido las siguientes normas: El número de adultos no debe superar al doble del número de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5000.

Si el precio de la entrada de niño es de 10 euros y la de adulto 15 euros ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

5. Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$$x + y \leq 600 , x \leq 500 , y \leq 3x , x \geq 0 , y \geq 0$$

- a) Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.
- b) Halle el punto del recinto anterior en el que $F(x, y) = 38x + 27y$ alcanza su valor máximo.

6.

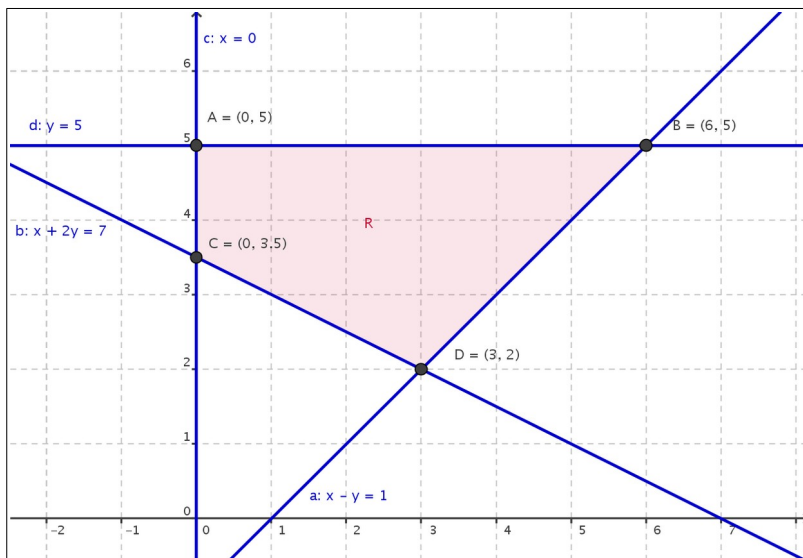
Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros.

Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

Soluciones

1.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un cuadrilátero:



b) Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los cuatro vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,5) \quad , \quad B=(6,5) \quad , \quad C=(0,3,5) \quad \text{y} \quad D=(3,2)$$

c) Observemos ahora que al ser

$$F(x, y) = 2x + 4y - 5$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

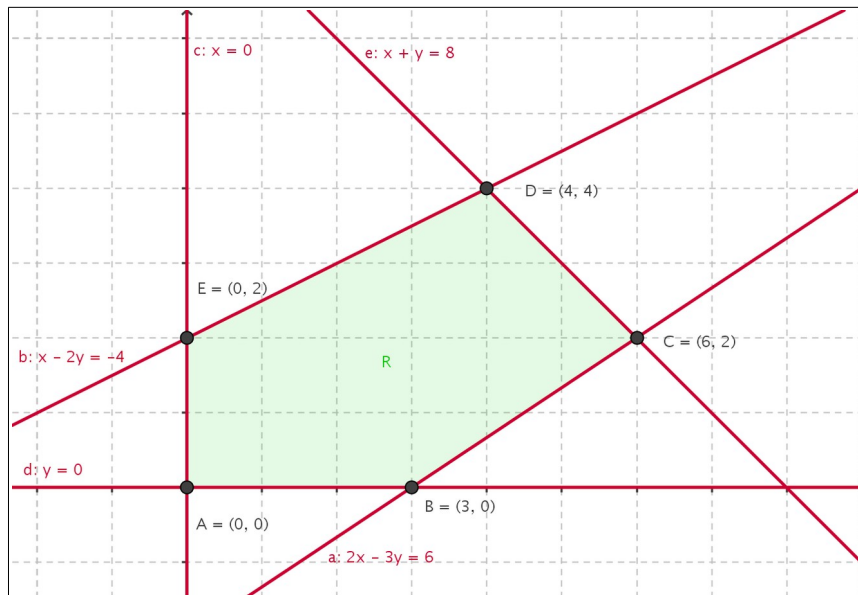
$$\begin{aligned} A=(0,5) &\rightarrow f(A) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 - 5 = 15 \\ B=(6,5) &\rightarrow f(B) = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 - 5 = 27 \\ C=(0,3,5) &\rightarrow f(C) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3,5 - 5 = 9 \\ D=(3,2) &\rightarrow f(D) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 5 = 9 \end{aligned}$$

Vemos que el valor mínimo (9) se obtiene en dos vértices: C y D . Ello nos indica que hay infinitas soluciones: en todos los puntos del segmento \overline{CD} se alcanza ese valor mínimo. Por ello, ese segmento es la solución para el problema de mínimos:

$$\begin{aligned} \max f &= 27 \text{ y se alcanza en } B=(6,5) \\ \min f &= 9 \text{ y se alcanza en } \overline{CD}, \text{ con } C=(0,3,5) \text{ y } D=(3,2) \end{aligned}$$

2.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un pentágono:



b)

Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los cinco vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,0) , B=(3,0) , C=(6,2) , D=(4,4) \text{ y } E=(0,2)$$

c) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=2x+3y$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

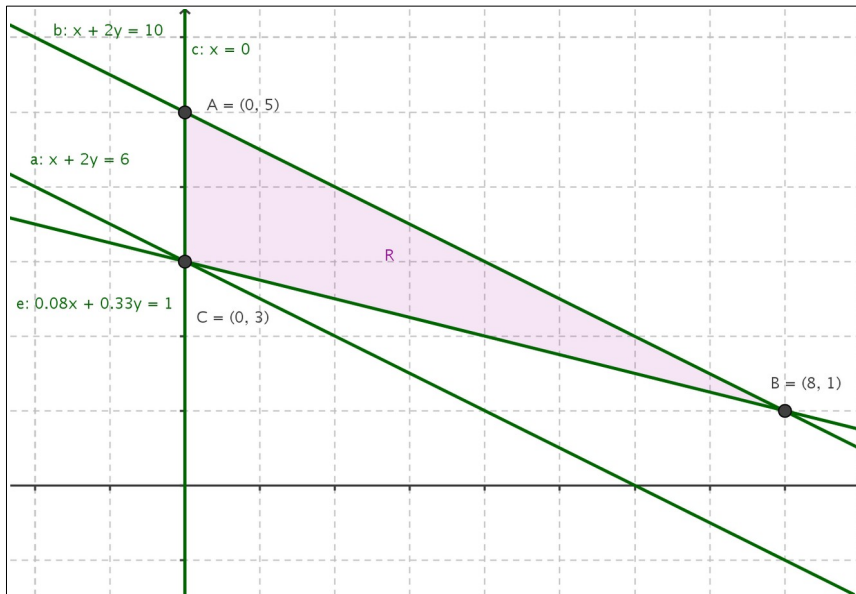
$$\begin{aligned} A=(0,0) &\rightarrow f(A)=2\cdot 0+3\cdot 0=0 \\ B=(3,0) &\rightarrow f(B)=2\cdot 3+3\cdot 0=6 \\ C=(6,2) &\rightarrow f(C)=2\cdot 6+3\cdot 2=18 \\ D=(4,4) &\rightarrow f(D)=2\cdot 4+3\cdot 4=20 \\ E=(0,2) &\rightarrow f(D)=2\cdot 0+3\cdot 2=6 \end{aligned}$$

Concluimos:

$$\begin{aligned} \max f &= 20 \text{ y se alcanza en } D=(4,4) \\ \min f &= 0 \text{ y se alcanza en } A=(0,0) \end{aligned}$$

3.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un triángulo:



Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los tres vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,5) \text{ , } B=(8,1) \text{ y } C=(0,3)$$

b) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=4-3x-6y$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{aligned} A=(0,0) &\rightarrow f(A)=2\cdot 0+3\cdot 0=0 \\ B=(3,0) &\rightarrow f(B)=2\cdot 3+3\cdot 0=6 \\ C=(6,2) &\rightarrow f(C)=2\cdot 6+3\cdot 2=18 \\ D=(4,4) &\rightarrow f(D)=2\cdot 4+3\cdot 4=20 \\ E=(0,2) &\rightarrow f(D)=2\cdot 0+3\cdot 2=6 \end{aligned}$$

Concluimos:

$$\begin{aligned} \max f &= 20 \text{ y se alcanza en } D=(4,4) \\ \min f &= 0 \text{ y se alcanza en } A=(0,0) \end{aligned}$$

4. Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de las entradas:

	<i>coste</i>	<i>días</i>
<i>Niños</i>	10	x
<i>Adultos</i>	15	y

- Total de espectadores hasta 20 000
- N° adultos no supera doble n° niños.
- N° adultos menos n° niños no supera 5 000

- Queremos máximos ingresos.

Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:

- El ingreso está en función del n° de entradas (x e y) vendidas:

$$i = 10x + 15y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:

- Total de espectadores hasta 20 000:

$$x + y \leq 20000$$

- N° adultos no supera doble n° niños.

$$y \leq 2x$$

- N° adultos menos n° niños no supera 5 000:

$$y - x \leq 5000$$

- Evidentemente, no pueden ser negativos:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Concluimos:

- **Objetivo:** maximizar $i = 10x + 15y$

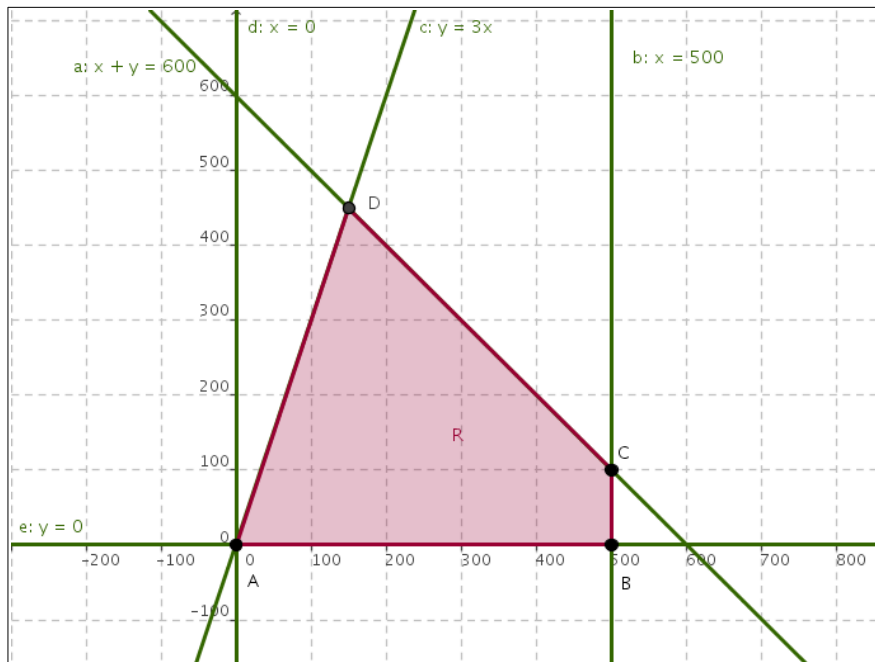
- **Restricciones:**

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 20000 \\ y \leq 2x \\ y - x \leq 5000 \end{cases}$$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...

5.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un cuadrilátero:



Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,0) , B=(500,0) , C=(500,100) \text{ y } D=(150,450)$$

b) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=38x+27y$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{aligned} A=(0,0) &\rightarrow f(A)=38\cdot 0+27\cdot 0=0 \\ B=(500,0) &\rightarrow f(B)=38\cdot 500+27\cdot 0=19000 \\ C=(500,100) &\rightarrow f(C)=38\cdot 500+27\cdot 100=21700 \\ D=(150,450) &\rightarrow f(D)=38\cdot 150+27\cdot 450=17850 \end{aligned}$$

Concluimos:

$$\max f=21700 \text{ y se alcanza en } C=(500,100)$$

6. Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de los ordenadores:

	Máximo	Horas	Beneficio	días
<i>Fijos</i>	10	4	100	x
<i>Portátiles</i>	15	10	150	y

- Horas de trabajo hasta 160.

- Queremos máximo beneficio.

Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:

- El beneficio está en función del nº de ordenadores (x e y) :

$$b = 100x + 150y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:

- El número de ordenadores fijos está entre cero y 10:

$$0 \leq x \leq 10$$

- El número de ordenadores portátiles está entre cero y 15:

$$0 \leq y \leq 15$$

- Las horas de trabajo no superan las 160:

$$4x + 10y \leq 160$$

Concluimos:

- **Objetivo:** maximizar $b = 100x + 150y$

- **Restricciones:**

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 4x + 10y \leq 160 \end{cases}$$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...