TEMA 2

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicios para Selectividad
de
Matrices y Determinantes

Detalladamente
resueltos

Cursos
2004 / 2005
2005 / 2006

Enunciados

1. [S/05] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $C=B\cdot A-A^t\cdot B^t$

b) Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$

2. [S/05] Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-z & = & -2\\ 2x-z & = & 0\\ -2y+z & = & 4\end{cases}$$

¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.

3. [S/05]

a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar; razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar:

$$A+B \ ; \ A^t+B \ ; \ A\cdot B \ ; \ A\cdot B^t$$

b) Resuelva y clasifique, atendiendo al número de soluciones, el sistema:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

4. [S/05] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}$

a) Determine el valor de x en la matriz B para que se verifique la igualdad

$$A\cdot B=B\cdot A$$

b) Obtenga la matriz C tal que

$$A^t\cdot C=I_2$$

5. [S/05] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B .

b) Si $A\cdot B=B\cdot A$ y $A+A^t=3\cdot I_2$, calcule x e y.

6. [S/06] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^{-1}\cdot(2B+3I_2)$

b) Determine la matriz X para que $X\cdot A=A+I_2$.

7. [S/06] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2=A$.

b) Igualmente para que $A-I_2=B^{-1}$.

c) Determine x para que $A\cdot B=I_2$.

8. [S/06]

a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Calcule $A^{-1}\cdot(B-A^t)$.

b) Resuelva y clasifique el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. [S/06] Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores de los números reales x , y , z para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices:

$$E-x\cdot A\cdot B=y\cdot C+z\cdot D$$

10. [S/06] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

Explique qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial

$$X\cdot A+2B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y resuelva la ecuación.

Soluciones

1.

a)
$$\left.\begin{array}{l} BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -4 & -2 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\\ A^t B^t=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ -1 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \rightarrow C=BA-A^t B^t=\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Hallemos primero

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

Ahora despejamos X:

$$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \rightarrow X=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}-2/3\\ 0\end{pmatrix}$$

2. Hallemos su determinante:

$$\det C=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

Como su determinante es cero, no tiene inversa.

3. Tenemos:

a) $A+B$ no puede efectuarse pues no tienen las mismas dimensiones.

$A\cdot B^t$ no puede efectuarse pues el número de columnas de A (3) no coincide con el número de filas de B^t (2).

$$A^t+B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$$

b) El determinante de los coeficientes es

$$\det C=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

Tenemos así que es un sistema compatible determinado, por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}}{-2}\ ,\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-2}\ ,\ z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}}{-2}$$

4.

a) Calculemos e igualemos los resultados:

$$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1+3x\\ 0 & x\end{pmatrix}\\ BA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & x\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \rightarrow\ -1+3x=5\ \rightarrow\ 3x=6\ \rightarrow\ x=2$$

b) Vamos a despejar X:

$$A^t C=I\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X=I\ \rightarrow\ X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot I\ \rightarrow\ X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

5.

a) Como su determinante es distinto de cero ($\det B=-2$) la matriz tiene inversa. Es:

$$B^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y & 2x\\ y+x & -2y\end{pmatrix}\\ BA=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-2y & -y+2x\\ x & y\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \rightarrow\ \begin{cases}-x+y=-x-2y\ \rightarrow\ y=0\\ 2x=-y+2x\ \rightarrow\ y=0\\ y+x=x\ \rightarrow\ y=0\\ y=-2y\ \rightarrow\ y=0\end{cases}$$

Ahora, tras colocar $y=0$, examinamos la otra condición:

$$A+A^t=3I_2\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ 3x=2\ \rightarrow\ x=\frac{3}{2}$$

Concluimos que debe ser:

$$x=\frac{3}{2}\ ,\ y=0$$

6.

a) Vamos a despejar:

$$\left.\begin{array}{l} A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ 2B+3I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \rightarrow\ A^{-1}\cdot(2B+3I)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7\\ -9 & -14\end{pmatrix}$$

José Álvarez Fajardo

b) Despejando:

$$X=(A+I)\cdot A^{-1} \quad \rightarrow \quad X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Podemos considerarlo una experiencia compuesta de dos fases

a) Calculemos e igualemos:

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2=A \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=1 \\ x+1=2 \;\rightarrow\; x=1 \end{cases}$$

Como vemos, debe ser $x = 1$.

b) Calculemos la inversa de B:

$$B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos:

$$A-I=B^{-1} \quad \rightarrow \quad A=B^{-1}+I=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que resulta ser $A = B$.

c) Efectuamos e igualamos:

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} x+1=0 \;\rightarrow\; x=-1 \\ x+2=1 \;\rightarrow\; x=-1 \end{cases}$$

Como vemos, debe ser $x = -1$.

Nota: otra forma de hacerlo sería $AB=I \;\rightarrow\; A=B^{-1} \;\rightarrow\; x=-1$

8.

a) Efectuemos:

$$\left.\begin{aligned} A^{-1}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ B-A^t&=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; A^{-1}\cdot(B-A^t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculemos el determinante de los coeficientes:

$$det\,C=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; \text{No es un sistema Cramer: es SCD ó SI}$$

Resolviendo obtenemos que es compatible indeterminado con:

$$(x, y, z)=(-3t-1, t+1, t)$$

9. Tiene que cumplirse:

$$\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}-2 &= x-2y+z\\-5 &= 3x-5y+2z\\5 &= 4x+2y-3z\end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $x=1$, $y=2$, $z=1$

10. X debe tener tantas columnas como filas A (2). Y el producto $X\cdot A$ debe tener las mismas dimensiones que B (1 times 2). Por ello X debe tener 1 fila.

Resumiendo: X tiene 1 fila y 2 columnas.

Para obtenerla, despejamos:

$$XA=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}-2B \quad\rightarrow\quad XA=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\cdot A^{-1}$$

Hallamos la inversa de A:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & -2\\5 & 2\end{pmatrix}$$

Ahora ya podemos obtener X:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -2\\5 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}14 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\end{pmatrix}$$