Nombre: ______________________________________ ***Curso 2º*** ___	
Final – Mates Aplicadas II	

✗ EJERCICIO 1

a) [1,25] Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3-A)^3$

b) [1,25] Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ determine a y b para que se verifique la igualdad $B \cdot C - D = O$, siendo O la matriz nula.

✗ EJERCICIO 2

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [1] Calcule $A^2-B\cdot C^t$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $AX+B=2\cdot C$.

✗ EJERCICIO 3

Se considera el recinto ***R*** del plano, determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x+y \ge 2 \ , \ x+3y \le 15 \ , \ y-3x \ge -15 \ , \ x \ge 0 \ , \ y \ge 0$$

a) [1,5] Represente gráficamente el recinto ***R*** y calcule sus vértices.

b) [0,5] Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y) = 3x + y$ en dicho recinto.

c) [0,5] Razone si existen puntos (x,y) del recinto, para los que $F(x,y) = 30$.

✗ EJERCICIO 4

a) [2] Plantee el siguiente problema:

"Una empresa elabora dos productos, *A* y *B*. Cada unidad de *A* requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de *B* necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.

Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de *A*, y de 50 euros por cada unidad de *B*, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?"

b) [0,5] Consideremos el recinto cuyos vértices son $A=(1,1)$, $B=(3,1)$, $C=(3,4)$, $D=(1,4)$. Obtenga un sistema de inecuaciones que determine el recinto.

Nombre: ______________________________ **Curso 2º** ___	
Final – Mates Aplicadas II	

✗ EJERCICIO 5

Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la función

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

donde B es el beneficio por kilo y x el precio de cada kilogramo, ambos expresados en euros.

a) [1,25] ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

b) [1,25] ¿Qué precio maximiza los beneficios?

c) [0,5] Si tiene en el almacén 10000 kg. de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

✗ EJERCICIO 6: Dada la función $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

a) [1] Estudie su monotonía y determine las coordenadas de sus extremos relativos.

b) [0,75] Obtenga los límites para $x \to \pm\infty$ y esboce la gráfica de la función.

c) [0,75] Calcule el área del recinto que encierra su gráfica con el eje de abscisas.

✗ EJERCICIO 7:

a) [1,25] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) [1,25] Se considera la función $f(x) = ax^3 - 12x^2 + bx - 5$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, -8)$.

✗ EJERCICIO 8: Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 4x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) [0,5] Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) [0,5] Represéntela gráficamente.

c) [0,5] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

d) [0,25] Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde $f'(x) = 0$.

e) [0,75] Calcula la integral definida de la función en el intervalo [– 2 , 2].

Nombre: ____ **Curso 2º** ___	
Final – Mates Aplicadas II	

✗ <u>EJERCICIO 9</u>: En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

a) [1] Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?

b) [1] Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

c) [0,5] ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

✗ <u>EJERCICIO 10</u>: Una enfermedad afecta a un 5 % de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96 % de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen se obtiene un 2 % de resultados positivos. Elegida una persona, al azar, y aplicada la prueba:

a) [1,25] ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado positivo?

b) [1,25] Si se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca la enfermedad?

✗ <u>EJERCICIO 11</u>: Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.

a) [0,5] Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) [1] Determine la probabilidad del suceso *A*: “El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda”.

c) [1] Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

✗ <u>EJERCICIO 12</u>

Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que:

$$p(A)=0{,}4 \ , \ p(B)=0{,}3 \ \text{ y } \ p(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}5$$

a) [1,5] Calcule las siguientes probabilidades: $p(A\cup B)$, $p(A/B)$ y $p(B/\overline{A})$

b) [0,5] Razone si *A* y *B* son sucesos incompatibles.

c) [0,5] Razone si *A* y *B* son independientes.

Nombre: ____ ***Curso 2º*** ___ Final – Mates Aplicadas II	

✗ EJERCICIO 13

a) [1,5] Sea la población { 3 , 5 , 7 }. Calcule la desviación típica de las medias muestrales, con reemplazamiento, de tamaño 3.

b) [1] Una población de tamaño 1000 se ha dividido en 4 estratos de tamaño 150, 400, 250 y 200. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

✗ EJERCICIO 14

En un distrito universitario, la calificación de los alumnos sigue una distribución Normal de media 6.2 puntos y desviación típica de 1 punto. Se seleccionó, aleatoriamente, una muestra de tamaño 25.

a) [1] Indique la distribución de la media de las muestras de tamaño 25.

b) [1,5] ¿Cuál es la probabilidad de que la media de las calificaciones de los alumnos de una de esas muestras esté comprendida entre 6,3 y 6,6 puntos?

✗ EJERCICIO 15

Una variable aleatoria sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 2,4. Se quiere estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 93%, para lo que se toman dos muestras de distintos tamaños.

a) [1,25] Si una de las muestras tiene tamaño 16 y su media es 10,3, ¿cuál es el intervalo de confianza correspondiente?

b) [1,25] Si con la otra muestra el intervalo de confianza es (9,776 , 11,224), ¿cuál es la media muestral? ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

✗ EJERCICIO 16

Tomada al azar una muestra de 600 alumnos de una universidad española, se encontró que 2/3 de los mismos podían expresarse en inglés con fluidez.

a) [1.5] Calcule un intervalo de confianza al 98% para estimar la proporción de alumnos de esa universidad que pueden expresarse en inglés con fluidez. ¿Se podría admitir a ese nivel de confianza que la proporción de alumnos de esa universidad que pueden expresarse en inglés con fluidez es 13/20?

b) [0.25] Teniendo en cuenta el intervalo anterior, ¿qué error máximo se cometería en dicha estimación?

c) [0.75] Si se mantienen la misma proporción muestral y la misma confianza, ¿cuántos alumnos como mínimo habría de tener una muestra para que el error de estimación sea inferior al 2%?

✗ EJERCICIO 1

a) Calculemos primero $I_3 - A$:

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, multiplicamos esa matriz por sí misma tres veces:

$$(I_3 - A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculemos $B \cdot C - D$ (el resultado es una matriz columna con dos filas):

$$B \cdot C - D = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3a \\ -b+9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-6 \\ -b-1 \end{pmatrix}$$

Como el resultado debe ser matriz nula, igualamos a cero ambos:

$$\begin{cases} 3a-6=0 \\ -b-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

✗ EJERCICIO 2

a) Calculemos primero los términos de la diferencia y luego los restamos:

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Para obtener X despejamos como sigue:

$$A \cdot X + B = 2C \rightarrow A \cdot X = 2C - B \rightarrow X = A^{-1} \cdot (2C - B)$$

Hallemos esas dos matrices:

$$\left.\begin{array}{l} det\, A = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-5) = -1 \\ Adj\, A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot (AdjA)^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2C - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 10 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

✗ EJERCICIO 3

Se considera el recinto **R** del plano, determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \geq 2 \ , \ x + 3y \leq 15 \ , \ y - 3x \geq -15 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

a) Despejemos convenientemente para ver el semiplano:

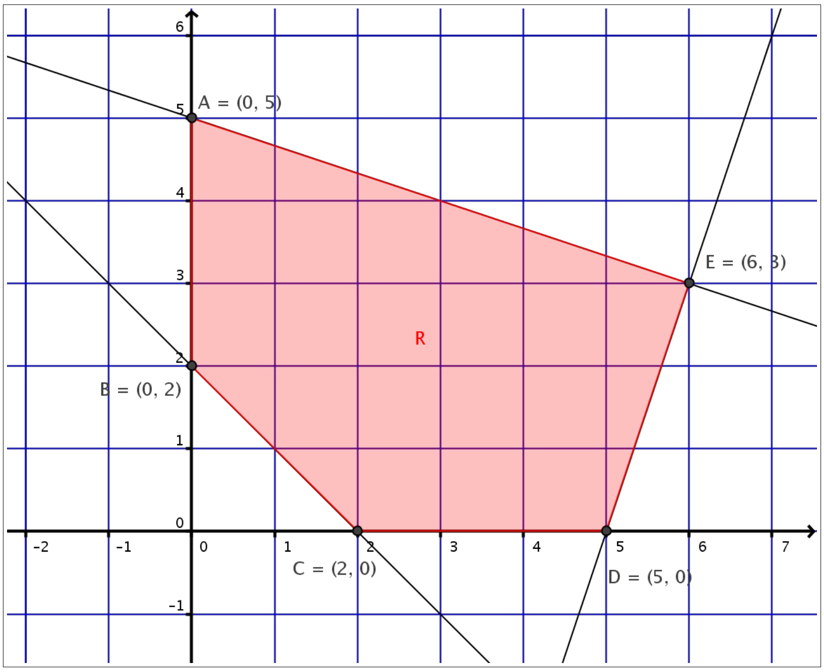
$x + y \geq 2 \rightarrow y \geq 2 - x$ → Semiplano superior a $y = 2 - x$

$x + 3y \leq 15 \rightarrow x \leq 15 - 3y$ → Semiplano izquierdo a $x = 15 - 3y$

$y - 3x \geq -15 \rightarrow y \geq -15 + 3x$ → Semiplano superior a $y = -15 + 3x$

$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$ → Primer cuadrante

Aquí tenemos el recinto dibujado. En él apreciamos claramente las coordenadas de los vértices:



b) Como F es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sus vértices:

Vértices		***F= 3 x + y***
$A=(0,5)$	→	5
$B=(0,2)$	→	2
$C=(2,0)$	→	6
$D=(5,0)$	→	15
$E=(6,3)$	→	21

Tenemos así que el valor máximo es $F = 21$, que se alcanza en el vértice $E=(6,3)$.

Tenemos así que el valor máximo es $F = 2$, que se alcanza en el vértice $B=(0,2)$.

c) No puede haber ningún punto en el que sea $F = 30$. Todos los valores que toma F están comprendidos entre 2 (el mínimo) y 21 (el máximo). No puede haber un punto en el que tome un valor mayor que el máximo.

✗ EJERCICIO 4

a) Organicemos todos los datos en una tabla:

Productos	***Máquina 1***	***Máquina 2***	***Beneficio***	***Unidades***
A	2	5	70	x
B	4	3	50	y

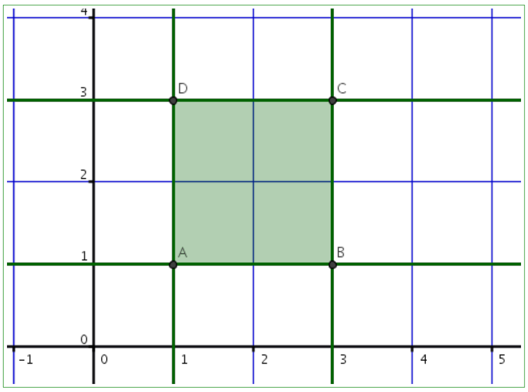
- Las horas empleadas en la máquina 1 hasta 100 ➞ $2x+4y\le 100$
- Las horas empleadas en la máquina 2 hasta 110 ➞ $5x+3y\le 110$
- Queremos el máximo beneficio.

Concluimos de aquí:

✔ Objetivo: maximizar $f=70x+50y$

✔ Restricciones: debe cumplirse $\begin{cases} x\ge 0,\ y\ge 0 \\ 2x+4y\le 100 \\ 5x+3y\le 110 \end{cases}$

b) Organicemos todo:

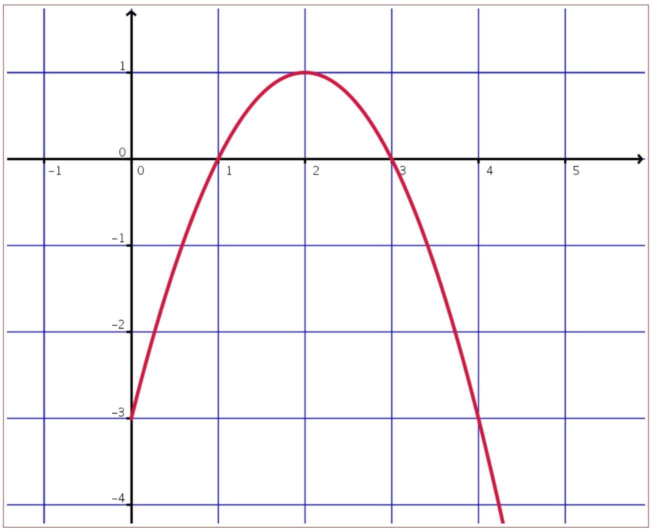


Lado	***Ecuación***	***Semiplano***	***Inecuación***
AB	$y=1$	Superior	$y\ge 1$
BC	$x=3$	Izquierdo	$x\le 3$
CD	$y=3$	Inferior	$y\le 3$
AD	$x=1$	Derecho	$x\ge 1$

Concluimos que el recinto es el determinado por el conjunto de restricciones anteriores.

✗ EJERCICIO 5

Vamos a dibujar su gráfica para ayudarnos que es sencilla: una parábola de cóncava con vértice para $x_V=\frac{-4}{-2}=2$. Con una sencilla tabla de valores:



a) En la gráfica apreciamos que es $B>0$ (por encima del eje **X**) en el intervalo (1 , 3). Así, hay beneficios para un precio entre 1 y 3 euros el kilo.

b) El máximo absoluto se alcanza en el vértice: para 2 euros el kilo.

c) El beneficio máximo será de

$$B = 10000 \cdot 1 = 10000 \text{ €}$$

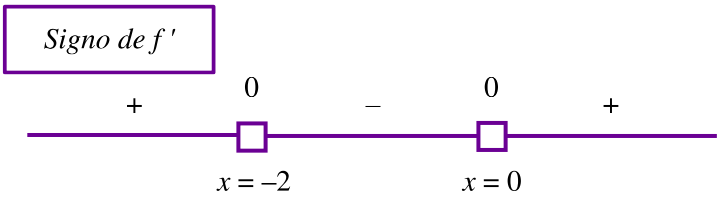
✗ EJERCICIO 6:

a) Estudiamos el signo de la derivada primera.

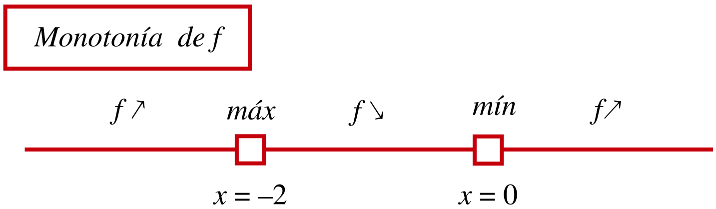
Primero hallemos sus ceros:

$$y'=3x^2+6x \rightarrow 3x^2+6x=0 \rightarrow x\cdot(3x+6)=0 \rightarrow x=0\ ,\ x=-2$$

Sus intervalos de signo:



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



Máximo: $x=-2 \rightarrow y=0 \rightarrow (-2,0)$

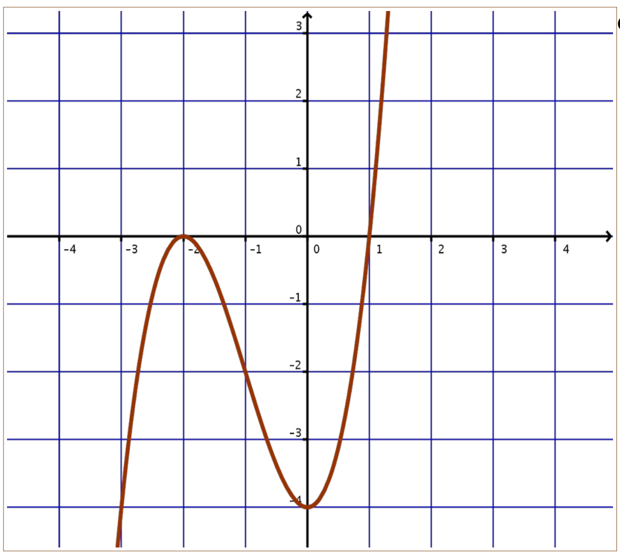
Mínimo: $x=0 \rightarrow y=-4 \rightarrow (0,-4)$

b) Para los obtener los límites en el infinito de un polinomio basta comprobar el término líder:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=(-\infty)^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=(+\infty)^3=+\infty$$

Con los extremos anteriores y los límites elaboramos una simple tabla de variación y de ahí el aspecto de la gráfica:



c) En la gráfica apreciamos que el recinto al que se refiere el enunciado es el que se forma entre la curva $y = x^3 + 3x^2 - 4$ y el eje de abscisas entre $x = -2$ y $x = 1$. Así que calculamos:

$$\int_{-2}^{1} (x^3 + 3x^2 - 4)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x\right]_{-2}^{1} = -\frac{51}{4}$$

Luego el área es

$$A = 12.75\ \mathrm{u}^2$$

✗ <u>EJERCICIO 7</u>:

a) Derivemos primero: $$g'(x)=\frac{3\cdot(x-1)-1\cdot(3x-2)}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

La ecuación de la recta tangente para $a=2$:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2) \rightarrow y-(4)=-1\cdot(x-2) \rightarrow y=-x+6$$

b) Es $f(x)=ax^3-12x^2+bx-5 \rightarrow f'(x)=3ax^2-24x+b \rightarrow f''(x)=6ax-24$

Pasa por el punto $(1,-8)$ ⇨ $f(1)=-8$ ⇨ $a-12+b-5=-8$ $(*)$

Inflexión en $(1,-8)$ ⇨ $f''(1)=0$ ⇨ $6a-24=0$ $(**)$

De (**) obtenemos que es $a=4$ y sustituyendo en (*) resulta $b=5$.

✗ <u>EJERCICIO 8</u>:

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua, al ser polinómica a trozos, para $x=-1$ (cambio de fórmula):

$\boxed{x=-1}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{VALOR:} & \text{si } x=-1 \text{ es } y=5 \\ \text{TENDENCIAS:} & \begin{cases} \text{si } x\to -1- & \text{es } y=x+6\to 5 \\ \text{si } x\to -1+ & \text{es } y=x^2-4x\to 5 \end{cases} \end{array}\right\} \text{Continua en } x=-1$$

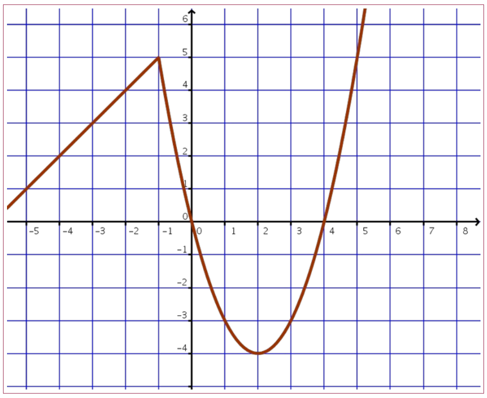
<u>Derivabilidad</u>: podemos derivar directamente $f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<-1 \\ 2x-4 & \text{si } x>-1 \end{cases}$

Veamos ahora detenidamente en el cambio de fórmula

$\boxed{x=-1}$

Como f es continua, las derivadas laterales son: $\begin{cases} \text{si } x\to -1- & \text{es } y'=1\to 1 \\ \text{si } x\to -1+ & \text{es } y'=2x-4\to -6 \end{cases}$

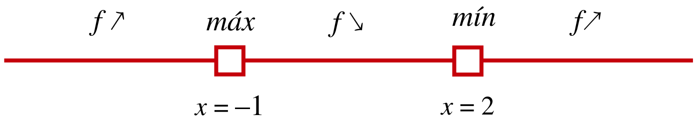
Como no coinciden concluimos que es no es derivable para $x=-1$ (es un *punto anguloso*).



b) La forman una semirrecta ($y=x+6$, $x\leq -1$) + un trozo de parábola ($y=x^2-4x$ si $x>-1$). El vértice de la parábola lo encontramos para $x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$.

c) De la gráfica deducimos:

Monotonía de f



d) En $x=-1$ hay un máximo relativo, pero la derivada no puede ser nula porque, como es un punto anguloso, no hay derivada.

En $x=2$ hay un mínimo relativo, y la derivada ahí sí es cero: $f'(2)=2\cdot 2-4=0$.

e) Aplicamos la aditividad en el intervalo de integración y usamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (x+6)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{+2} \left(x^2-4x\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+6x\right]_{x=-2}^{x=-1} + \left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{x=-1}^{x=+2} = \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

✗ <u>EJERCICIO 9</u>: Llamemos O = "consumir aceite de oliva" y G = "consumir aceite de girasol". Es

Organicemos todo en una tabla con $p(O)=0{,}55$, $p(G)=0{,}30$, $p(O\cap G)=0{,}20$:

	G	$\overline{G}$	
O	0,20	0,35	0,55
$\overline{O}$	0,10	0,35	0,45
	0,30	0,70	1

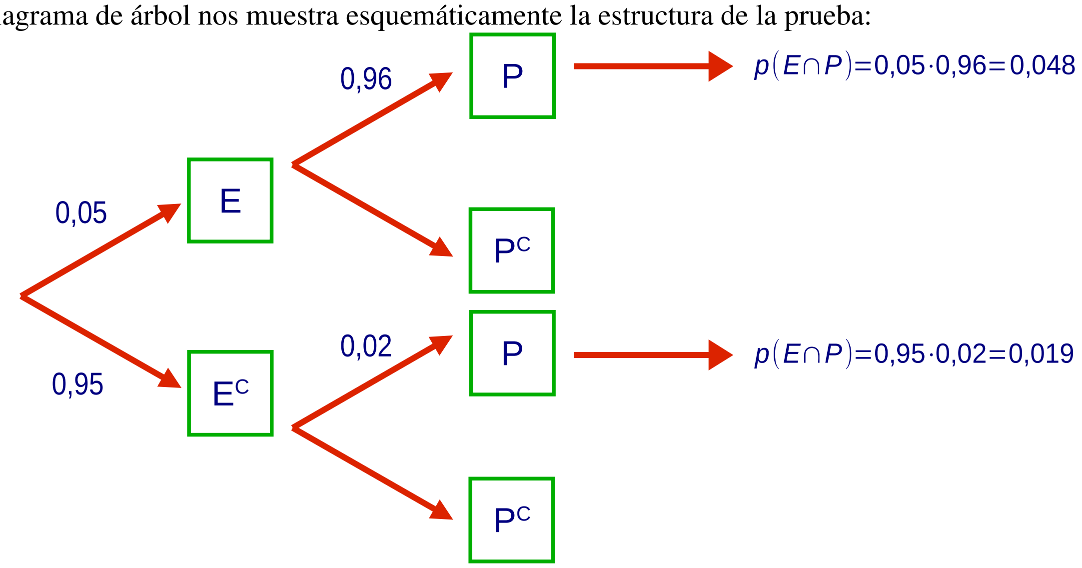
a) Es una probabilidad condicionada: $p(G/O)=\dfrac{p(G\cap O)}{p(O)}=\dfrac{0{,}20}{0{,}55}=0{,}3636\ldots$

b) Es una probabilidad condicionada: $p(B/F)=\dfrac{p(B\cap F)}{p(F)}=\dfrac{0{,}09}{0{,}57}=0{,}1578\ldots$

c) Directamente, en la tabla: $p(B/F)=\dfrac{p(B\cap F)}{p(F)}=\dfrac{0{,}09}{0{,}57}=0{,}1578\ldots$

✗ <u>EJERCICIO 10</u>: Llamemos E = "estar enfermo" y P = "dar positivo".

El diagrama de árbol nos muestra esquemáticamente la estructura de la prueba:



a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$p(P)=0{,}048+0{,}019=0{,}067$$

b) Es una probabilidad condicionada “a posteriori”:

$$p(\overline{E}/P)=\frac{p(\overline{E}\cap P)}{p(P)}=\frac{0{,}019}{0{,}067}=0{,}28658\ldots$$

✗ EJERCICIO 11: Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.

a) El espacio muestral de este experimento aleatorio será

$$E=\begin{Bmatrix} 1C & 2C & 3C & 4C & 5C & 6C \\ 1X & 2X & 3X & 4X & 5X & 6X \end{Bmatrix} \rightarrow 6\times 2=12 \text{ resultados posibles.}$$

b) $A=\{2X, 4X, 6X\} \rightarrow p(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

c) Consideramos los sucesos:

$S=$ sale cara $=\{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C\}$

$M=$ sale mayor que 3 $=\{4C, 5C, 6C, 4X, 5X, 6X\}$

$M\cap S=\{4C, 5C, 6C\}$

La probabilidad que se pide es condicionada:

$$p(M/S)=\frac{p(M\cap S)}{p(S)}=\frac{3/12}{6/12}=\frac{1}{2}$$

✗ EJERCICIO 12

Organicemos todo en una tabla:

	A	$\overline{A}$	
B	0,2	0,1	0,3
$\overline{B}$	0,2	0,5	0,7
	0,4	0,6	1

a) La probabilidad pedida es la de la unión:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}5+0{,}3-0{,}2 \rightarrow p(A\cup B)=0{,}5$$

b) A y B son incompatibles cuando su intersección es vacía. Como la probabilidad de la intersección no es cero, la intersección no está vacía. Así concluimos que A y B no son incompatibles.

c) Veamos si A y B son independientes:

$$\left.\begin{array}{r} p(A\cap B)=0{,}2 \\ p(A)\cdot p(B)=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12 \end{array}\right\} \rightarrow p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B) \rightarrow A \text{ y } B \text{ son dependientes}$$

✗ EJERCICIO 13

a) La variable aleatoria en la población es $\boldsymbol{X} = \{ 3 , 5 , 7 \}$

La media y la desviación típica de la población son:

$$\mu=\frac{3+5+7}{3}=\frac{15}{3}=5$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{3^2+5^2+7^2}{3}-\mu^2}=\sqrt{\frac{83}{3}-25}=\sqrt{2{,}6666\ldots}$$

La desviación típica de las medias muestrales de tamaño n = 3 es:

$$\bar{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2{,}6666\ldots}}{\sqrt{3}}=\sqrt{0{,}8888\ldots}\approx 0{,}9428$$

b) Si llamamos n al tamaño muestral es:

$$\frac{250}{1000}\times n=10 \;\rightarrow\; n=\frac{10\times 1000}{250} \;\rightarrow\; n=40$$

✗ EJERCICIO 14

La v. a. $\boldsymbol{X}$ = "calificaciones de los alumnos" es normal con $\left|\begin{array}{l}\mu=6{,}2\\ \sigma=1\end{array}\right.$

Tamaño muestral: n = 25

a) La distribución de las medias muestrales es normal (porque $\boldsymbol{X}$ lo es) con $\left|\begin{array}{l}\bar{\mu}=\mu=6{,}2\\ \bar{\sigma}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{25}}=0{,}2\end{array}\right.$

b) La probabilidad pedida es:

$$p(6{,}3<\overline{X}<6{,}6)=p(0{,}5<Z<2)=0{,}9772-0{,}6915=0{,}2857$$

$$(*)\; z_1=\frac{\bar{x}-\bar{\mu}}{\bar{\sigma}}=\frac{6{,}3-6{,}2}{0{,}2}=0{,}5 \quad , \quad z_2=\frac{\bar{x}-\bar{\mu}}{\bar{\sigma}}=\frac{6{,}6-6{,}2}{0{,}2}=2$$

✗ EJERCICIO 15: La v. a. X es normal con $\left|\begin{array}{l}\mu=¿?\\ \sigma=2{,}4\end{array}\right.$

a) Tamaño muestral: n = 16

Media muestral: $\bar{x}=10{,}3$

Nivel de confianza: $p=1-\alpha=0{,}93$ → Valor crítico: $z_{\alpha/2}=1{,}81$

El intervalo de confianza, para la media de la población, es:

$$I=\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(10{,}3-1{,}086\,,\,10{,}3+1{,}086)=(9{,}214\,,\,11{,}386)$$

b) Ahora, con el mismo nivel de confianza, el intervalo es:

$$I=(9{,}776\,,11{,}224)$$

La media muestral está en el centro del intervalo:

$$\bar{x}=\frac{9{,}776+11{,}224}{2}=10{,}5$$

Para obtener el tamaño muestral (n = ¿?) primero hallamos el error máximo:

$$Amplitud=11{,}224-9{,}776=1{,}448 \rightarrow E=\frac{Amplitud}{2}=\frac{1{,}448}{2}=0{,}724$$

Del error sacamos el tamaño muestral:

$$E_{máx}=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0{,}724=1{,}81\cdot\frac{2{,}4}{\sqrt{n}}= \rightarrow \sqrt{n}=1{,}81\cdot\frac{2{,}4}{0{,}724}=6 \rightarrow n=6^2=36$$

✗ EJERCICIO 16:

a) El tamaño muestral es n=600.

La proporción muestral es $\widetilde{p}=\dfrac{2}{3} \to \widetilde{q}=\dfrac{1}{3}$

$1-\alpha=0.98 \to \dfrac{\alpha}{2}=0.01 \to p\left(z<z_{\alpha/2}\right)=0.99 \xrightarrow{tabla} z_{\alpha/2}\approx 2.33$

El intervalo de confianza, para la proporción de la población, es:

$$I=\left(\widetilde{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widetilde{p}\,\widetilde{q}}{n}}\,,\widetilde{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widetilde{p}\,\widetilde{q}}{n}}\right)=\left(\frac{2}{3}-2.33\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{600}}\,,\frac{2}{3}+2.33\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{600}}\right)$$

Operando y redondeado a cuatro decimales:

$$I=(0.6218\,,0.7115)$$

Como $13/20=0.64\in I$, podría admitirse la afirmación a ese nivel de confianza.

b) Es el número que restamos y sumamos a la proporción muestral en el intervalo de confianza y que ya hemos calculado:

$$E=2.33\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{600}}\approx 0.0448$$

c) De la fórmula del error máximo:

$$0.02=2.33\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{n}}\to n=2.33^2\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{0.02^2}=3016.05\ldots\approx 3016$$

Tomaremos como mínimo 3016 individuos en la muestra.

Nota: si observamos en la tabla, el percentil que corresponde a $p=0.99$ es en realidad un número comprendido entre 2.32 y 2.33. Nosotros hemos optado por el mayor (que con $p=0.9901$ es el más cercano), por lo que no tiene sentido a aproximar ese tamaño muestral mínimo por exceso.