Nombre:____ *Curso*:_____
Matemáticas Aplicadas II – Muestreo, Inferencia e Hipótesis – 16/05/2022

EJERCICIO 1: [2]

a) [1,25] El número de aparatos de TV que tienen cinco personas en sus hogares es **X** = { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 }. Obtén la varianza de las medias muestrales de tamaño tres con reemplazamiento.

b) [0,75] Estudiamos hábitos de vida en una población compuesta por 1600 mujeres y 1200 hombres y deseamos diferenciar por sexos las respuestas. Para ello vamos a elegir una muestra de tamaño 80. ¿Qué tipo de muestreo es el más conveniente? ¿Cuál será la composición de la muestra y cómo la formaremos?

EJERCICIO 2: [2,5]

Las peras de una cosecha tienen un peso medio de 220 gr. y una desviación típica de 25 gr. La fruta se pone a la venta en cajas de 50 piezas.

a) [1] ¿Cómo es la distribución de las medias muestrales?

b) [1,5] ¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto de una caja supere los 11.5 kg?

EJERCICIO 3: [3]

La estatura de los habitantes de una población sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 8 cm. Para estimar la media poblacional se toma una muestra de cien individuos, cuya estatura media resulta ser 172.5 cm.

a) Obtén un intervalo de confianza a un nivel del 96%

b) ¿Qué error, como máximo, cometemos con la estimación anterior?

c) Si mantenemos el mismo nivel de confianza, ¿cómo podríamos conseguir que la amplitud del intervalo fuese la cuarta parte del anterior?

EJERCICIO 4: [2,5]

En una población, para estimar la proporción de hogares que separan sus residuos y los depositan en diferentes contenedores, se ha procedido a realizar una encuesta. Se ha construido con una confianza del 95% el intervalo $(0.3079\,,0.4421)$.

a) ¿Cuál ha sido la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el tamaño muestral?

c) Si aumentásemos el nivel de confianza, ¿qué efecto tendría sobre la amplitud del intervalo? ¿Cómo podríamos aumentar la confianza manteniendo el máximo error admisible?

EJERCICIO 1:

a) La variable aleatoria en la población es **X** = { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 }.

El tamaño muestral es $n = 3$. Vamos primero a calcular los parámetros de la población:

$$\mu = \frac{16}{5} = 3.2$$

$$\sigma^2 = \frac{66}{5} - 3.2^2 = 2,96$$

Así, la varianza de las medias muestrales de tamaño $n = 3$ (con reemplazamiento) es:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2.96}{3} = 0.9866\ldots \approx 0.9867$$

Observemos las barras que tienen los parámetros: fundamentales para no confundirlos con los parámetros de la población.

b) Procederemos a un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional.

Mostremos esquemáticamente las composiciones de la población y de la muestra:

Población	
Mujeres	Hombres
1600	1200
$N = 2800$	

Muestra	
Mujeres	Hombres
46	34
$n = 80$	

Mujeres: $\frac{1600}{2800} \times 80 = 45.71\ldots \approx 46$

Hombres: $80 - 46 = 34$

Ahora elegimos en cada estrato, mediante muestreo aleatorio simple, el número de individuos señalados anteriormente.

EJERCICIO 2:

La variable **X** = "peso de las peras" tiene $\begin{cases} \mu = 220 \\ \sigma = 25 \end{cases}$

Tamaño muestral: $n = 50$

a) Las medias muestrales $\overline{\mathbf{X}}$ son una v.a. normal (T.C.L. n > 30 suf grande) con $\begin{cases} \overline{\mu} = \mu = 220 \\ \overline{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{25}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$

b) La probabilidad pedida es, al ser $11500/50 = 230$:

$$\mathrm{p}\left(\overline{x} > 230\right) \overset{(*)}{=} \mathrm{p}\left(z > 2.83\right) = 1 - 0.99767 = 0.00233$$

$$[*]\ z = \frac{\overline{x} - \overline{\mu}}{\overline{\sigma}} = \frac{230 - 220}{5/\sqrt{2}} \approx 2.83$$

EJERCICIO 3:

La v.a. **X** = "estatura de los habitantes" es normal con $\begin{cases} \mu = ¿? \\ \sigma = 8 \end{cases}$

Nivel de confianza: $p = 1 - \alpha = 0.96$ $\rightarrow$ Valor crítico: $z_{\alpha/2} \approx 2.05$

a) Tamaño muestral: $n = 100$

Media muestral: $\overline{x} = 172.5$

El intervalo de confianza, para la media de la población, es:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (172.5 - 1.64\,, 172.5 + 1.64) = (170.86\,, 174.14)$$

b) El error máximo cometido se ha calculado separadamente antes y es

$$E = 1.64$$

c) El error máximo deberá ser la cuarta parte:

$$E = 1.64 : 4 = 0.41 \to 0.41 = 2.05 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \to n = 2.05^2 \cdot \frac{8^2}{0.41^2} = 1600$$

Deberíamos tomar un tamaño muestral $n = 1600$.

EJERCICIO 4:

a) La proporción muestral es el centro del intervalo de confianza:

$$\widetilde{p} = \frac{0.3079 + 0.4421}{2} = 0.375$$

b) Calculemos primero el valor crítico:

$$1 - \alpha = 0.95 \to \frac{\alpha}{2} = 0.025 \to p\left(z < z_{\alpha/2}\right) = 0.975 \xrightarrow{tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

Como el error máximo es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza:

$$E = \frac{0.4421 - 0.3079}{2} = 0.0671 \to 0.0671 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.375 \cdot 0.625}{n}}$$

Elevando al cuadrado despejamos el tamaño muestral n:

$$0.0671^2 = 1.96^2 \cdot \frac{0.375 \cdot 0.625}{n} \to n = \frac{1.96^2 \cdot 0.375 \cdot 0.625}{0671^2} = 199.9\ldots \to n = 200$$

c) Si aumenta el nivel de confianza, el valor crítico es mayor y, por ello, la amplitud del intervalo ($L = 2\,E$) es mayor también al crecer el error máximo admisible.

Para que no crezca la amplitud aumentamos convenientemente el tamaño muestral, pues al estar en el denominador el incremento de n conlleva una disminución del error máximo admisible.