Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas Aplicadas II – Integrales – 07/03/2021

EJERCICIO 1: [2,5]

Obtengamos las siguientes integrales indefinidas:

a) [1] $\displaystyle\int \left(3\,\mathrm{e}^{5x}+2\right)\mathrm{d}x$

b) [1,5] $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x-2}\,\mathrm{d}x$

EJERCICIO 2: [2,5]

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuya derivada viene definida por

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-3x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1\,,-2)$.

EJERCICIO 3:

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si} \quad x\le 0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) [0,5] Estudiemos su continuidad

b) [1] Calculemos $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

c) [1,5] Calculemos el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas entre $x=-2$ y $x=2$.

EJERCICIO 4: [2]

Consideremos, para $a>0$ constante, las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=a\,x$$

¿Para qué valor de dicha constante el recinto delimitado por sus gráficas tiene un área igual a $36\,\mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

a) Es una sencilla integral en la que la exponencial es una función compuesta de elementales:

$$\int \left(3\,\mathrm{e}^{5x}+2\right)\mathrm{d}x=\int \left(3\,\mathrm{e}^{5x}\right)\mathrm{d}x+\int 2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}+2x+C$$

b) Vemos que es una integral racional con el grado del numerador no menor que el del denominador, así que efectuando la división entera:

$$\left(x^2-1\right):(x-2)\ \rightarrow\ \begin{cases} c=x+2\\ r=3\end{cases}$$

Así:

$$\int \frac{x^2-1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int (x+2)\,\mathrm{d}x+\int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\,x^2+2x+3\ln|x+2|+C$$

EJERCICIO 2:

Integramos cada trozo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x^3-\dfrac{3}{2}\,x^2+x+a & \text{si} \quad x\le 1\\ x^2-3x+b & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el punto $(-1\,,2)$:

$$f(-1)=-2\ \rightarrow\ -\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-1+a=-2\ \rightarrow\ a=\frac{5}{6}$$

Al existir derivada para $x=1$, la función es continua en $x=1$ y por ello debe ser:

$$f(1)=f(1-)=f(1+)\ \rightarrow\ \frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1+\frac{5}{6}=1-3+b\ \rightarrow\ b=\frac{8}{3}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x^3-\dfrac{3}{2}\,x^2+x+\dfrac{5}{6} & \text{si} \quad x\le 1\\ x^2-3x+\dfrac{8}{3} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

EJERCICIO 3:

a) Como se trata de una función polinómica a trozos, sólo puede ser discontinua en x=0, que es el separa-fórmulas. Veamos en él:

$x=0$

Valor: $f(0)=0^2+0=0$

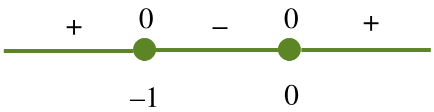
Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \begin{cases} f(0-)=0^2+0=0\\ f(0+)=3\cdot 0^2=0\end{cases}$

Concluimos que es continua para $x=0$ y, por ello, en todo punto.

b) Aplicamos la aditividad en el intervalo de integración y usamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\left(x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_0^2\left(3x^2\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{x=0}+\left[x^3\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{2}{3}+8=\frac{26}{3}$$

c) Estudiamos el signo de la función, obteniendo previamente sus ceros. El esquema resume la situación:



Calculamos entonces separadamente, aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{-1} \left(x^2 + x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{x=-1} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{0} \left(x^2 + x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\int_{0}^{2} \left(3x^2\right) \mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{x=0}^{x=2} = 8 - 0 = 8$$

Luego el área solicitada es:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 8 = 9 \quad (\ \mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 4:

Las gráficas son una parábola (convexa) y una recta creciente.

Para averiguar dónde se cortan la curva y la recta igualamos sus fórmulas:

$$x^2 = a\,x \ \rightarrow \ x^2 - a\,x = 0 \ \rightarrow \ x\,(x-a) = 0 \ \rightarrow \ x = 0\,, x = a$$

Calculamos por ello la integral:

$$\int_{0}^{a} \left(a\,x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{a\,x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Igualando al área dada obtendremos el valor de la constante:

$$\frac{a^3}{3} = 36 \ \rightarrow \ a^3 = 216 \ \rightarrow \ a = 6$$