***Nombre***:____________________________________________________________ ***Curso***:_____

*Matemáticas Aplicadas II – Aplicaciones de las Derivadas – 14/02/2022*

EJERCICIO 1:

Las funciones

$$I(t) = -6t^3 + 40t^2 - 80t + 51 \quad , \quad G(t) = -2t^3 + t^2 + 10t + 15 \quad (0 \leq t \leq 7)$$

representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años ( $t$ ) transcurridos desde su inicio.

a) [1] Determine la función que refleja los beneficios en función del tiempo y estudie su monotonía.

b) [1] ¿Cuáles han sido las máximas ganancias? ¿Y las mayores pérdidas? ¿En qué momento se alcanzaron?

c) [0,5] Realiza un esbozo de la función beneficio.

EJERCICIO 2:

Dada la función

$$y = x\left(x^2 + ax + b\right)$$

a) [1,5] Determine los valores de $a$ y de $b$ sabiendo que $(-1\,,2)$ es un punto de extremo relativo.

b) [1] Para $a = 0$ y $b = -3$, estudie su curvatura y obtenga las coordenadas de su punto de inflexión.

EJERCICIO 3:

Consideremos la función definida por

$$f(x) = \frac{2-4x}{x+3} \quad (x \neq -3)$$

a) [0,5] Estudie su continuidad.

b) [0,5] Obtenga sus asíntotas.

c) [1] ¿Es la función decreciente en todo su dominio? Razone la respuesta.

d) [0,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ para $x = -2$.

EJERCICIO 4:

Para la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax - x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

*a)* [0,75] Estudie su continuidad según los valores de $a$

b) [1] Para $a = 1$ analice algebraicamente la monotonía de $f$ e indique dónde presenta extremos relativos.

c) [0,75] Para $a = 1$ dibuje su gráfica.

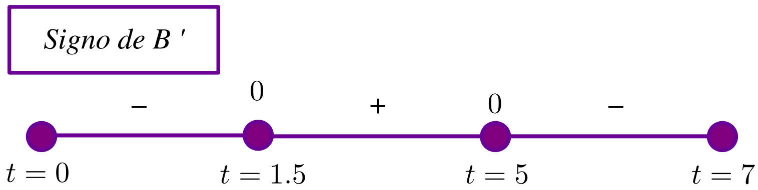
EJERCICIO 1:

a) Para hallar los beneficios calculamos los ingresos menos los gastos:

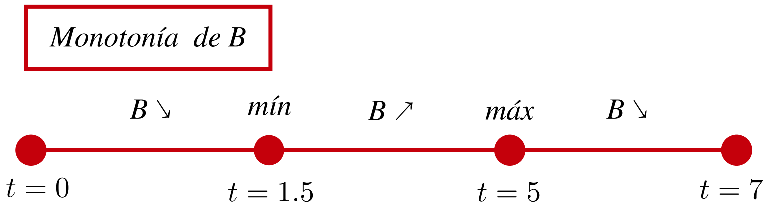
$$B\,(t) = I\,(t) = G\,(t) \;\rightarrow\; B\,(t) = -4t^3 + 39t^2 - 90t + 36$$

Calculamos su derivada y obtenemos sus ceros e intervalos de signo:

$$B'\,(t) = -12t^2 + 78t - 90$$




De ahí sacamos la variación. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



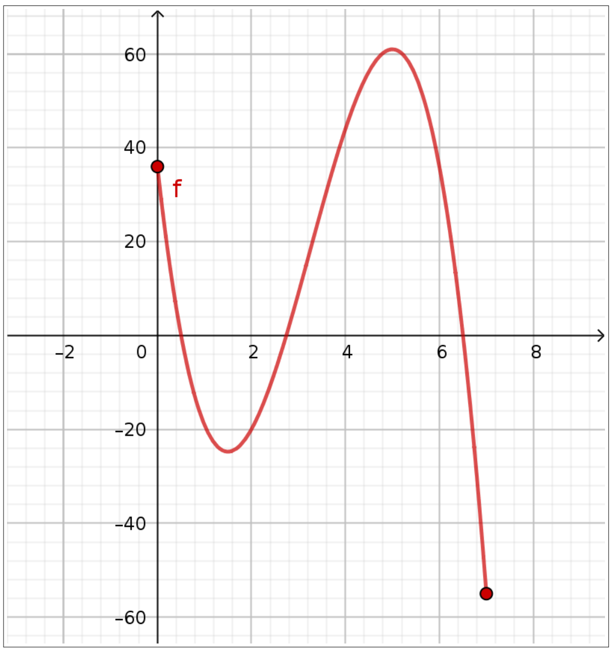

b) Al tratarse de una función continua en un compacto, la función alcanza un valor máximo y un valor mínimo (si fuese negativo se trataría de pérdidas). Confeccionamos una tabla de variación:

| *t* | 0 | | 1.5 | | 5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *B* | 36 | ↘ | - 24.75 | ↗ | 61 | ↘ | -55 |

Deducimos que las máximas ganancias fueron de 61000 € y se alcanzaron a los cinco años.

Deducimos que las máximas pérdidas fueron de 55000 € y se alcanzaron a los 7 años.

c) Con la tabla de variación y un par de valores más obtenemos su gráfica:



EJERCICIO 2:

a) Obtengamos primero la derivada:

$$y = x^3 + ax^2 + bx \;\rightarrow\; y' = 3x^2 + 2ax + b$$

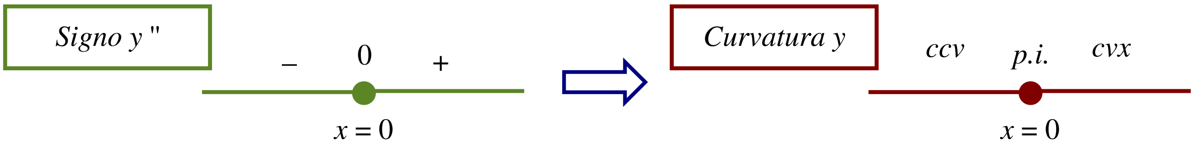
Como tiene un extremo en el punto $(-1\,,2)$:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{si} & x=-1 & \text{es} & y=2 & \rightarrow \;\; 3-2a+b=0 \\ \text{si} & x=-1 & \text{es} & y'=0 & \rightarrow \;\; -1+a-b=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a=0\,, b=-3$$

b) Hallemos la derivada segunda y estudiemos su signo:

$$y = x^3 - 3x^2 \;\rightarrow\; y' = 3x^2 - 6x \;\rightarrow\; y'' = 6x$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda y traducimos:




Como pasa de cóncava a convexa hay un punto de inflexión en el punto $x=0\,, y=0$.

EJERCICIO 3:

a) Al ser racional, $f$ sólo es discontinua para los ceros del denominador: $x+3=0 \rightarrow x=-3$.

$x=-3$

VALOR: si $x=-3$ es $y=$ no existe

TENDENCIAS: $\left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \rightarrow -3_{-} & \text{es} & y \rightarrow \left[\frac{14}{-0}\right] = -\infty \\ \text{si } x \rightarrow -3+ & \text{es} & y \rightarrow \left[\frac{14}{+0}\right] = +\infty \end{array}\right.$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=-3$.

b) Asíntotas verticales: Hay discontinuidad de salto infinito para $x=-3$ → $x=-3$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty} \dfrac{2-4x}{x+3} = \dfrac{-4}{1} = -4$ (grados) → $y=-4$

c) Calculemos su derivada para estudiar el signo:

$$f'(x) = \frac{-4(x+3)-1(2-4x)}{(x+3)^2} = \frac{-14}{(x+3)^2} < 0$$

La función decrece en $(-\infty\,,-3)$ y en $(-3\,,+\infty)$, pero no es decreciente en todo su dominio, pues hay un salto infinito en $x=-3$ y pasa de $-\infty$ a $+\infty$ como vimos antes.

d) La ecuación de la recta tangente para $x=-2$:

$$y - f(-2) = f'(-2)\,(x+2) \;\rightarrow\; y-10 = -1\,(x+2) \;\rightarrow\; y = -14x - 18$$

EJERCICIO 4:

a) Como cada fórmula define una función continua en su trozo de dominio, la función sólo puede ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas):

VALOR: si $x = 1$ es $y = a - 1$

TENDENCIAS: $\left\{ \begin{array}{lll} \text{si } x \to 1_- & \text{es} & y = ax - x^2 \to a - 1 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} & y = \ln x \to 0 \end{array} \right.$

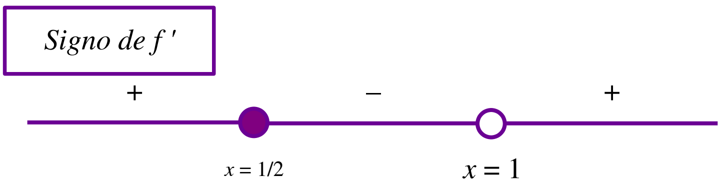
Sólo hay coincidencia cuando $a - 1 = 0 \to a = 1$

Así concluimos que para $a = 1$ es continua en todo punto y para $a \neq 1$ sólo es discontinua para $x = 1$, donde presenta un salto finito.

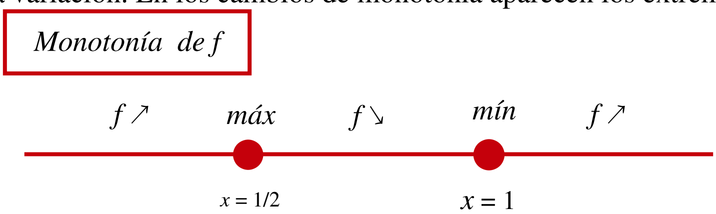
b) Colocamos ya $a = 1$. Podemos derivar directamente:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x - 2x^2 & \text{si} & x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. \to f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 - 2x & \text{si} & x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de la derivada. Son puntos especiales $1 - 2x = 0 \to x = \dfrac{1}{2}$ y el separa-fórmulas:




De ahí sacamos la variación. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:




c) La forman un trozo de parábola ($y = 1 - 2x^2$, $x \leq 0$) + un trozo de curva ($y = \ln x$, $x > 0$). El vértice de la parábola lo encontramos en el cero de la derivada.

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos: