*Nombre:*____ *Curso:*_____

Matemáticas Aplicadas II – Ampliación Derivadas

EJERCICIO 1: [1,5]

Obtén razonadamente las asíntotas de la función f definida mediante

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 5}{x + 2}$$

EJERCICIO 2: [2] Calcula y simplifica la función derivada de las siguientes funciones:

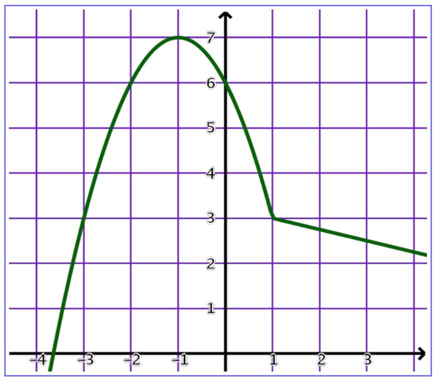
a) $y = x^3\, \mathrm{e}^{-5x}$

b) $y = \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 2x}$

c) $y = \sqrt{4x + \cos 2x}$

d) $y = \ln\left(x^2 - 1\right)^3$

EJERCICIO 3: [1] Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada a la derecha.



Escribe una tabla que recoja, razonadamente:

a) los puntos en los que la derivada no existe,
b) los puntos en los que la derivada es cero,
c) los intervalos de signo de la derivada.

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos la función dada por $f : [0\,,4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

a) [1,25] Averigua los valores de a y b sabiendo que $(1\,,-1)$ es un extremo relativo de su gráfica.

b) [1,25] Para $a = -3$ *y* $b = 1$, halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica paralela a $10x - y + 1 = 0$.

EJERCICIO 5: [3]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{-3}{x+2} & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ ax^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [1,5] ¿Para qué valor de a es continua en todo punto?

b) [1,5] Para $a = 2$ estudia la derivabilidad y obtén la función derivada.

EJERCICIO 1:

<u>Asíntotas verticales</u>: al ser una función racional, sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$$x+2=0 \;\rightarrow\; x=-2$$

Comprobemos si hay salto infinito:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+x-5}{x+2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\pm\infty$$

Concluimos que hay una asíntota vertical: $x=-2$.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x-5}{x+2}\overset{*}{=}\pm\infty$$

Concluimos que no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicua</u>: puede haber una oblicua $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x-5}{x^2+2x}\overset{*}{=}2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x-5}{x+2}-2x\right)\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-5}{x+2}\overset{[*]}{=}-3$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua para $x\rightarrow\pm\infty$:

$$y=2x-3$$

[*] Regla de los grados

EJERCICIO 2:

a) $y=x^3\mathrm{e}^{-5x} \;\rightarrow\; y'=3x^2\cdot\mathrm{e}^{-5x}+x^3\cdot\mathrm{e}^{-5x}\cdot(-5)=\mathrm{e}^{-5x}\left(3x^2-5x^3\right)$

b) $y=\dfrac{x+\operatorname{sen}2x}{x-\operatorname{sen}2x}\rightarrow y'=\dfrac{(1+2\cos 2x)\,(x-\operatorname{sen}2x)-(1-2\cos 2x)\,(x+\operatorname{sen}2x)}{(x-\operatorname{sen}2x)^2}=\dfrac{4x\cos 2x-2\operatorname{sen}2x}{(x-\operatorname{sen}2x)^2}$

c) $y=\sqrt{4x+\cos 2x} \;\rightarrow\; y'=\dfrac{1}{2\sqrt{4x+\cos 2x}}\cdot(4-\operatorname{sen}2x\cdot 2)=\dfrac{2-\operatorname{sen}2x}{\sqrt{4x+\cos 2x}}$

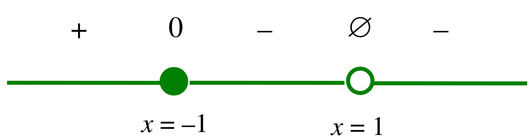
d) $y=\ln\left(x^2-1\right)^3 y=\ln\left(x^2-1\right)^3 \;\rightarrow\; y'=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^3}\cdot 3\cdot\left(x^2-1\right)^2\cdot 2x=\dfrac{6x}{x^2-1}$

EJERCICIO 3:

Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa
- que la derivada es cero en los extremos relativos suaves
- que la derivada no existe en el punto anguloso:

Así el esquema de la derivada es:



EJERCICIO 4:

a) Primero, derivemos la función: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx \ \rightarrow \ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Como para $x = 1$ hay extremo (suave) es: $f'(1) = 0 \ \rightarrow \ 3 + 2a + b = 0$ [*]

El punto $(1, -1)$ está en la gráfica: $f(1) = -1 \ \rightarrow \ 1 + a + b = -1$ [**]

Resolviendo el sistema formado por [*] y [**] obtenemos que debe ser $a = b = -1$

b) Pendiente de la recta: $r: 10x - y + 1 = 0 \ \rightarrow \ y = 10x + 1 \rightarrow m = 10$

La pendiente es la derivada: $f'(x) = m \ \rightarrow \ 3x^2 - 6x + 1 = 10 \ \rightarrow \ \rightarrow \ \cancel{x = -1}, x = 3$

La tangente es: $y - f(3) = f'(3)(x - 3) \ \rightarrow \ y - 3 = 10 \cdot (x - 3) \rightarrow y = 10x - 27$

EJERCICIO 5:

a) Como cada fórmula define una función continua en su parte del dominio, f sólo podría ser discontinua para $x = -1$ y para $x = 1$ (separa-fórmulas). Veamos:

$x = -1$

Valor: $f(-1) = (-1)^2 - a^2 = 1 - a^2$

Límites: $f(-1-) = (-1)^2 - a^2 = 1 - a^2$

$$f(-1+) = \frac{-3}{-1+2} = -3$$

Es continua en este punto sólo cuando todo coincide:

$$1 - a^2 = -3 \rightarrow a = \pm 2$$

$x = 1$

Valor: $f(1) = \dfrac{-3}{1+2} = -1$

Límites: $f(1-) = \dfrac{-3}{1+2} = -1$

$$f(1+) = a(-1)^2 + 1 = a + 1$$

Es continua en este punto sólo cuando todo coincide:

$$a + 1 = -1 \rightarrow a = -2$$

Concluimos que la función es continua en todo punto sólo cuando $a = -2$.

b) Podemos derivar directamente aplicando las reglas del cálculo de derivadas si $x \neq \pm 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{3}{(x+2)^2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 4x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para $x = -1$, como es continua, calculamos las derivadas laterales:

$$f'(-1-) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$f'(-1+) = \frac{3}{(-1+2)^2} = 3$$

Concluimos que la función no es derivable para $x = -1$ (punto anguloso)

Para $x = 1$, como es no continua, no puede ser derivable.

Así que la función derivada es la calculada anteriormente.