Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas Aplicadas II – Matrices y Determinantes – 08/11/2021	

EJERCICIO 1: [3,5]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1] Halle los valores de a , b y c para que se verifique $B \cdot C^t = A$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + A^2 = 2\mathrm{I}$.

c) [0,5] Obtenga A^{50}.

d) [0,5] Razona si existe alguna matriz D tal que efectuarse la operación $(D \cdot A)^t + 3B$.

EJERCICIO 2: [2]

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m existe D^{-1}.

b) [1,25] Calcule D^{-1} para $m = 2$.

EJERCICIO 3: [1,75]

Escriba y resuelva matricialmente el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 1)\,x + 5y &= 1 \\ \lambda\,x + 3y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de λ?

EJERCICIO 4: [2,75]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & 2y & + & (a+2)z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6-a \end{array}\right\}$$

a) [0,75] ¿Para qué valores del parámetro a es compatible determinado?

b) [0,75] Resuélvalo para $a = 1$.

c) [1] Resuélvalo para para $a = 0$.

d) [0,25] ¿Existe alguna solución en la que sea $y = 0$?

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b+1 & -c-7 \\ -b+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -a+2b+1 & = & -1 \\ -c-7 & = & -1 \\ -b+2 & = & 0 \\ 1 & = & 1 \end{array} \right| \rightarrow a=4\,, b=2\,, c=-6$$

b) A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 1-0 = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$X \cdot A + A^2 = 2\mathrm{I} \rightarrow X \cdot A = 2\mathrm{I} - A^2 \rightarrow X = \left(2\mathrm{I} - A^2\right) A^{-1}$$

Efectuamos las operaciones:

$$X = \left(2\mathrm{I} - A^2\right) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Por inducción llegamos a que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n=50} A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Pongamos que D es una matriz $m \times n$. Como A es 2×2 debe ser $n=2$ y así $D \cdot A$ es $m \times 2$, de modo que $(D \cdot A)^t$ es $2 \times m$. Ésta se podrá sumar con $3B$ si tiene sus mismas dimensiones, lo cual es posible sólo cuando $m = 3$ (resultando una matriz 2×3).

Así que puede efectuarse esa operación siempre y cuando D tenga dimensiones 3×2.

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = -m^2 + m + 6 \rightarrow -m^2 + m + 6 = 0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \; m=-2 \\ \searrow \; m=3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si } m=-2 \text{ ó } m=3 \rightarrow \det(D)=0 \rightarrow \text{No existe } D^{-1}$$

$$\text{Si } m\neq -2 \text{ y } m\neq 3 \rightarrow \det(D)\neq 0 \rightarrow \text{Sí existe } D^{-1}$$

b) Según lo anterior, para $m=2$ es A invertible.

$$\left. \begin{array}{l} \det(D) = -2^2+2+6 = 4 \\ \mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

Designemos por C, X y B a la matriz de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes, respectivamente. Expresamos el sistema matricialmente y despejamos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para hallar el parámetro podemos sustituir la solución en una de las ecuaciones del sistema:

$$(\lambda + 1) \cdot (-7) + 5 \cdot 3 = 1 \ \to \ -7\lambda - 7 + 15 = 1 \ \to \ \lambda = 1$$

EJERCICIO 4:

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -a^2 + 8a \ \xrightarrow{|C|=0} \ a\,(-a+8) = 0 \to a = 0\,, a = 8$$

El Teorema de Cramer nos dice que el sistema es compatible determinado sólo para $a \neq 0$ y $a \neq 8$.

b) Según lo anterior, podemos usar la Regla de Cramer:

$$a = 1 \ \to \ \det(C) = 7$$

Las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{7} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{7} \ , \ z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{7}$$

Efectuando y simplificando:

$$x = \frac{4}{7} \ , \ y = \frac{9}{7} \ , \ z = \frac{2}{7}$$

c) Del primer apartado sabemos que el determinante de coeficientes es cero (y por ello no podemos resolver usando la Regla de Cramer). Escribamos y resolvamos por Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x \qquad + \ z & = & 0 \\ 2x + 2z & = & 4 \\ x + 3y + 2z & = & 6 \end{array} \right. \xrightarrow[\substack{e_2'=e_2:2 \\ e_3'=e_1+e_3}]{e_1'=e_1} \left\{ \begin{array}{rcl} -x \qquad + \ z & = & 0 \\ y + \ z & = & 2 \\ 3y + 3z & = & 6 \end{array} \right. \xrightarrow[e_3'=-3e_2+e_3]{\substack{e_1'=e_1 \\ e_2'=e_2}} \left\{ \begin{array}{rcl} -x \qquad + \ z & = & 0 \\ y + \ z & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Tenemos que el sistema es compatible indeterminado. Resolvamos escalonadamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_3 : z = \qquad t \\ e_2 : y = 2 - t \\ e_1 : x = \qquad t \end{array} \right.$$

La solución es:

$$(x\,, y\,, z) = (t\,, 2 - t\,, t) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

d) Veamos en este último caso. Si hacemos $y = 0$ en la solución anterior:

$$\text{y=0} \xrightarrow{igualando} 2 - t = 0 \to t = 2 \xrightarrow{sustituyendo} (x\,, y\,, z) = (2\,, 0\,, 2)$$

(También podríamos buscar para otros valores de a)