Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas Aplicadas II – Aplicaciones de las Derivadas – 25 de marzo de 2015

EJERCICIO 1:

Las funciones

$$I(t) = -2t^2 + 51t \quad , \quad G(t) = t^2 - 3t + 96 \quad (0 \leq t \leq 18)$$

representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años (t) transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) [0,5] ¿En qué momentos, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) [0,75] Determine la función que refleje los beneficios en función del tiempo y represéntela gráficamente.

c) [0,5] ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

d) [0,75] ¿En que período hubo pérdidas?

EJERCICIO 2:

Dada la función

$$y = x^3 + ax^2 + b$$

a) [1,5] Determine los valores de a y de b sabiendo que $(2\,,1)$ es un punto de extremo relativo.

b) [1] Para $a = -3$ y $b = 5$, estudie su curvatura y obtenga las coordenadas de su punto de inflexión.

EJERCICIO 3: Dada la función

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

a) [0,5] Estudie su continuidad.

b) [0,5] Obtenga sus asíntotas.

c) [1,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 3$.

EJERCICIO 4:

Para la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - 2x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [0,75] Determine a sabiendo que f es continua.

b) [1] Para $a = 2$ analice algebraicamente la monotonía de f e indique dónde presenta extremos relativos.

c) [0,75] Para $a = 2$ dibuje su gráfica.

EJERCICIO 1:

a) Igualamos:

$$I\,(t) = G\,(t) \;\rightarrow\; -2t^2 + 51t = t^2 - 3t + 96 \;\rightarrow\; -3t^2 + 54t - 96 = 0 \;\rightarrow\; t = 2\,,\; t = 16$$

Ingresos y gastos fueron iguales a los 2 y a los 16 años de haber comenzado.

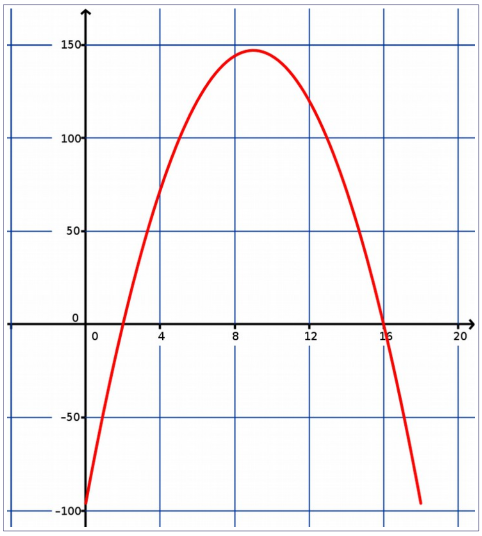
b) Para hallar los beneficios calculamos los ingresos menos los gastos:

$$B(t) = I\,(t) = G\,(t) \;\rightarrow\; B(t) = -3t^2 + 54t - 96$$

Su gráfica es una parábola cóncava con vértice en

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{-6} = 9$$

Con una tabla de valores adecuada la tenemos a la derecha.



c) Observamos que el máximo absoluto se encuentra en el vértice: se obtuvo una ganancia máxima de 147000 euros a los 9 años del inicio.

d) Hubo pérdidas cuando el beneficio fue negativo: la gráfica está bajo el eje X.

Apreciamos que ello ocurrió desde el inicio hasta los 2 años y desde los 16 hasta los 18 años.

EJERCICIO 2:

a) Obtengamos primero la derivada:

$$y = x^3 + ax^2 + b \;\rightarrow\; y' = 3x^2 + 2ax$$

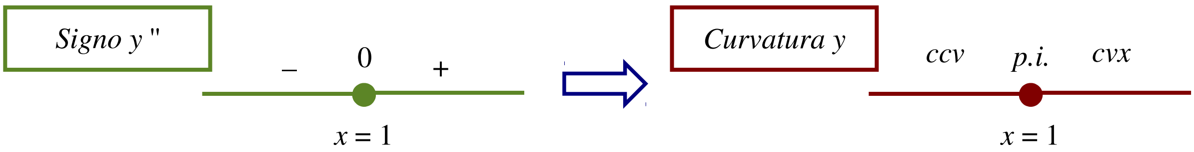
Como tiene un extremo en el punto $(2\,,1)$:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{si} & x = 2 & \text{es} & y = 1 & \rightarrow & 8 + 4a + b = 1 \\ \text{si} & x = 2 & \text{es} & y' = 0 & \rightarrow & 12 + 4a = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a = -3\,, b = 5$$

b) Hallemos la derivada segunda y estudiemos su signo:

$$y = x^3 - 3x^2 + 5 \;\rightarrow\; y' = 3x^2 - 6x \;\rightarrow\; y'' = 6x - 6$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda y traducimos:



Como pasa de cóncava a convexa hay un punto de inflexión en el punto $x = 1\,, y = 3$.

EJERCICIO 3:

a) f sólo puede ser discontinua para los ceros del denominador: $x-2=0 \to x=2$.

$x=2$

VALOR: si $x=2$ es $y=\left[\frac{7}{0}\right] =$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 2_- & \text{es} \quad y \to \left[\frac{7}{-0}\right] = -\infty \\ \text{si } x \to 2+ & \text{es} \quad y \to \left[\frac{7}{+0}\right] = +\infty \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=2$.

b) Asíntotas verticales: Hay discontinuidad de salto infinito para $x=2$ → $x=2$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3}{1} = 3$ (grados) → $y=3$

c) Para hallar la ecuación de la recta tangente derivemos primero:

$$f'(x) = \frac{3(x-2)-1(3x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2}$$

La ecuación de la recta tangente para $x=3$:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \to y-10 = -7(x-3) \to y = -7x+31$$

EJERCICIO 4:

a) Como la función es siempre continua, en particular lo es para $x=1$ (separa-fórmulas):

VALOR: si $x=1$ es $y=a-2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1_- & \text{es} \quad y = 2-x^2 \to a-2 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} \quad y = \ln x \to 0 \end{cases}$

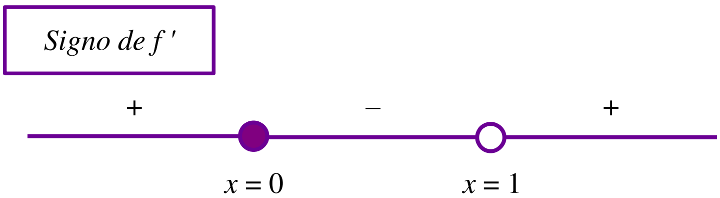
Para que es continua, deben ser iguales:

$$a-2=0 \to a=2$$

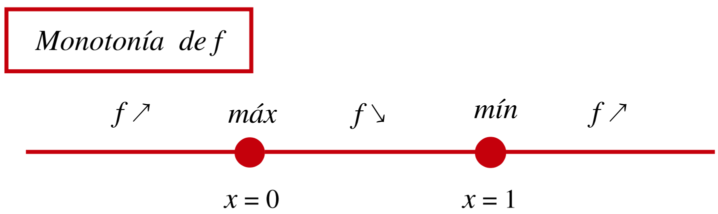
b) Colocamos ya $a=2$. Podemos derivar directamente:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada primera. Son puntos especiales $x=0$, que es un cero pues $-2x=0 \to x=0$, y el separa-fórmulas:



De ahí sacamos la variación. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



c) La forman un trozo de parábola ($y = 2 - 2x^2 \, , x \leq 0$) + un trozo de curva ($y = \ln x \, , x > 0$). El vértice de la parábola lo encontramos para $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{-4} = 0$.

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos: