Nombre:______________________________ *Curso*:_____	
Matemáticas Aplicadas II – Aplicaciones de las Derivadas – 18 de marzo de 2015	

EJERCICIO 1:

Tras un test realizado a un nuevo modelo híbrido de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $C(x)$, expresado en litros, viene dado por la función

$$C(x) = 4.5 - 0.05x + 0.00025x^2$$

siendo x la velocidad en km/h y $25 \leq x \leq 175$.

a) [0,5] Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h.

b) [1] Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

c) [1] ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtienen el mínimo y el máximo consumo?¿Cuáles son éstos?

EJERCICIO 2:

Dada la función $y = x^3 + ax^2 + bx$

a) [1,5] Determine los valores de a y de b sabiendo que $(2\,,8)$ es un punto de inflexión.

b) [1] Para $a = -3$ y $b = -9$, estudie su monotonía y obtenga las coordenadas de sus extremos relativos.

EJERCICIO 3:Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$

a) [0,5] Estudie su continuidad.

b) [0,5] Obtenga sus asíntotas.

c) [1,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 2$.

EJERCICIO 4:

Para la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudie numéricamente la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) [0,75] Analice algebraicamente la monotonía de f e indique dónde presenta extremos relativos.

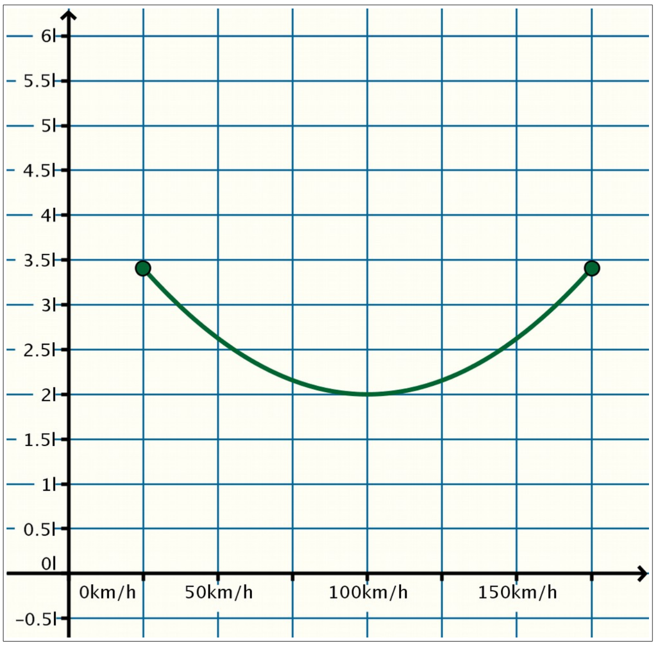
c) [0,75] Dibuje su gráfica.

EJERCICIO 1:

Vamos a dibujar su gráfica: se trata de una parábola cóncava con vértice en

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 100 \to y_v = 2$$

Con una tabla de valores adecuada:



a) $C(50) = C(175) = 2.625$

Así, a ambas velocidades consume el mismo combustible: 2.625 litros

b) Observamos que la parábola decrece en el intervalo $[25\,,100]$ y crece en $[100\,,175]$.

Luego al ir la velocidad de 0 a 100 km/h el consumo disminuye y al ir de 100 a 175 km/h el consumo disminuye.

c) En la gráfica apreciamos que el mínimo absoluto es el vértice de la parábola y que el máximo absoluto se alcanza tanto en el punto inicial como en el final.

Así, el máximo consumo es aproximadamente 3.4 litros tanto a 25 como a 175 km/h y el mínimo es de 2 litros cuando va a una velocidad de 100 km/h.

EJERCICIO 2:

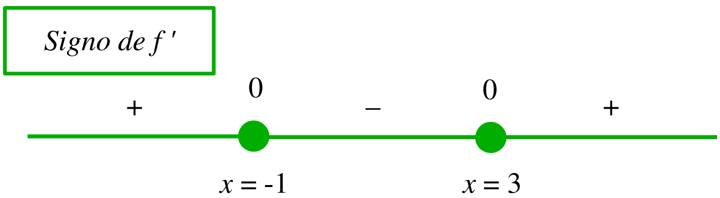
a) Obtengamos primero la derivada segunda:

$$y = x^3 + ax^2 + bx \;\to\; y' = 3x^2 + 2ax + b \;\to\; y'' = 6x + 2a$$

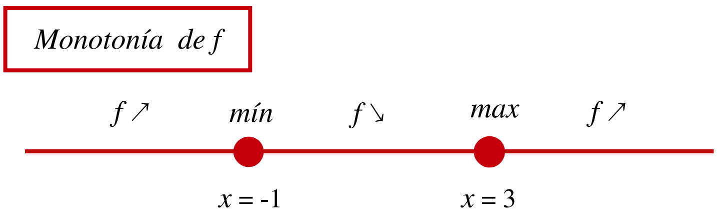
Como tiene un punto de inflexión en el punto $(2\,,8)$:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{si} & x=2 & \text{es} & y=8 & \to & 8+4a+2b=8 \\ \text{si} & x=2 & \text{es} & y''=0 & \to & 12+2a=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a=-6\,,b=12$$

b) Hallemos la derivada $y = x^3 - 3x^2 - 9x \;\to\; y' = 3x^2 - 6x - 9$ y estudiemos su signo:



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios aparecen los extremos relativos:



Como pasa de crecer a decrecer hay un máximo relativo en el punto $x = -1 \, , y = 5$.

Como pasa de decrecer a crecer hay un mínimo relativo en el punto $x = 3 \, , y = -27$.

EJERCICIO 3:

a) f sólo puede ser discontinua para los ceros del denominador: $x - 3 = 0 \to x = 3$.

$x = 3$

VALOR: $\quad$ si $x = 3$ es $y = \left[\frac{5}{0}\right] =$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 3_- & \text{es} \quad y \to \left[\frac{5}{-0}\right] = -\infty \\ \text{si } x \to 3_+ & \text{es} \quad y \to \left[\frac{5}{+0}\right] = +\infty \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 3$.

b) Asíntotas verticales: Hay discontinuiad de salto infinito para $x = 3$ ➔ $x = 3$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 1}{x - 3} = \dfrac{2}{1} = 2$ (grados) ➔ $y = 2$

c) Para hallar la ecuación de la recta tangente derivemos primero:

$$f'(x) = \frac{5(x-3) - 1(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

La ecuación de la recta tangente para $x = 2$:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \ \to \ y - (-3) = -5(x - 2) \ \to \ y = -5x + 7$$

EJERCICIO 4: $\quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas):

$x = 0$

VALOR: $\quad$ si $x = 0$ es $y = 1$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y = x + 1 \to 1 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y = x^2 - 4x + 1 \to 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

<u>Derivabilidad</u>: podemos derivamos directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

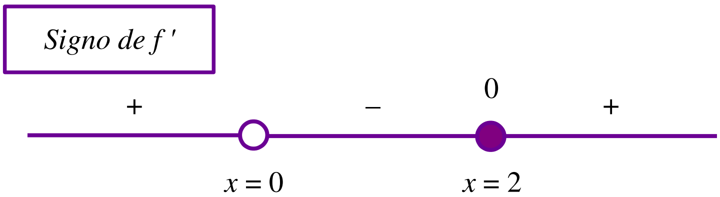
$x = 0$

Como f es continua, puede ser derivable:

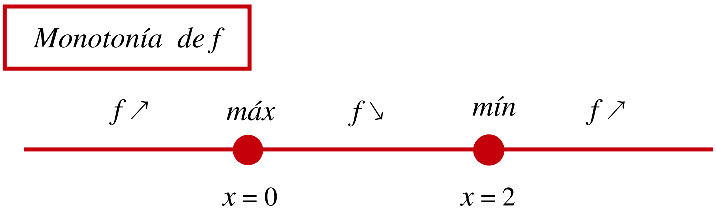
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y' = 1 \to 1 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y' = 2x - 4 \to -4 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (punto anguloso).

b) Estudiamos el signo de la derivada primera. Observemos que para $x = 0$ no hay derivada por ser punto anguloso.



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



c) La forman un trozo de recta ($y = x + 1\,, x \leq 0$) + un trozo de parábola ($y = x^2 - 4x + 1\,, x > 0$). El vértice de la parábola lo encontramos para $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos: