Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas Aplicadas II – Cálculo de Derivadas – 11 de febrero de 2015

EJERCICIO 1: [2,5]

Obtén la función derivada.

a) [0,5] $y = \dfrac{2x+7}{x^2+2}$

b) [0,75] $y = 2x^3 \ln(5x)$

c) [0,75] $y = \mathrm{e}^{2x+1} \cos(x^4)$

d) [0,5] $y = \sqrt{3x^3 - 2\,\mathrm{sen}(x)}$

EJERCICIO 2: [3,5]

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -4x-1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2x-3} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad

b) [1,25] Estudia su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [0,5] ¿Se anula en algún punto su derivada?

d) [1] Representa su gráfica.

EJERCICIO 3: [2]

De la función $y = x^3 + ax^2 + x + b$ se sabe que pasa por el punto $P = (1\,,2)$ y que en él se anula su derivada.

¿Cuáles son los valores de a y de b ?

EJERCICIO 4: [2]

Se sabe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto.

a) [0,75] Averigua el valor de a.

b) [1,25] Calcula $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

EJERCICIO 1:

a) $y' = \dfrac{2(x^2+2) - 2x(2x+7)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-2x^2-14x+4}{(x^2+2)^2}$

b) $y' = 6x^2\ln(5x) + 2x^3 \cdot \dfrac{1}{5x} \cdot 5 = 6x^2\ln(5x) + 2x^2$

c) $y' = \mathrm{e}^{2x+1} \cdot 2 \cdot \cos\left(x^4\right) - \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{sen}\left(x^4\right) \cdot 4x^3 = \mathrm{e}^{2x+1}\left(2\cos\left(x^4\right) - 4x^3\,\mathrm{sen}\left(x^4\right)\right)$

d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{3x^3 - 2\,\mathrm{sen}\,x}} \cdot \left(9x^2 - 2\cos x\right) = \dfrac{9x^2 - 2\cos x}{2\sqrt{3x^3 - 2\,\mathrm{sen}\,x}}$

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \begin{cases} -4x-1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{1}{2x-3} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x=-1$ y $x=2$ (separa-fórmulas):

$x=-1$

VALOR: si $x=-1$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to -1_- & \text{es} \quad y = -4x-1 \to 3 \\ \text{si } x \to -1_+ & \text{es} \quad y = x^2-2x \to 3 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x=-1$.

$x=2$

VALOR: si $x=2$ es $y=0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 2_- & \text{es} \quad y = x^2-2x \to 0 \\ \text{si } x \to 2_+ & \text{es} \quad y = \dfrac{1}{2x-3} \to 1 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s=-1$) para $x=2$.

b) <u>Derivabilidad</u>: podemos derivar directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x-2 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ -\dfrac{2}{(2x-3)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente.

$x=2$

Como la función no es continua, no puede ser derivable.

$x=-1$

Como f es continua, puede ser derivable:

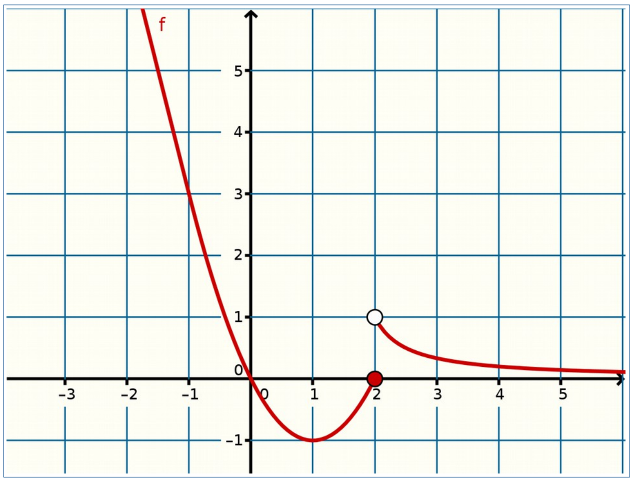
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \to -1_- & \text{es} \quad y' = -4 \to -4 \\ \text{si } x \to -1_+ & \text{es} \quad y' = 2x-2 \to -4 \end{cases}$

Como coinciden concluimos que es derivable para este valor con $f'(-1) = -4$.

c) Igualando a cero observamos que para $-1 < x < 2$ es

$$2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$$

d) La gráfica se compone de un trozo de parábola + trozo de recta + trozo de curva. Con unas tablas de valores obtenemos:



EJERCICIO 3:

Derivamos primero:

$$y = x^3 + ax^2 + x + b \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + 1$$

Veamos las condiciones:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{si} \quad x=1 & \text{es} \quad y=2 & \rightarrow & 1+a+1+b=2 \\ \text{si} \quad x=1 & \text{es} \quad y'=0 & \rightarrow & 3+2a+1=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a=-2\,,b=2$$

EJERCICIO 4:

a) Como la función es continua en todo punto, es continua para $x = 1$ (separa-fórmulas):

VALOR: si $x = 1$ es $y = -4$

$$\text{TENDENCIAS:} \left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \rightarrow 1_- & \text{es} & y = x^3 - 4x \rightarrow -3 \\ \text{si } x \rightarrow 1_+ & \text{es} & y = ax - 1 \rightarrow a - 1 \end{array}\right.$$

Como sabemos que es continua, deben coincidir, por ello:

$$a - 1 = -3 \;\rightarrow\; a = -2$$

b) Colocamos ya el número $a = -2$. Podemos derivar directamente:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3 - 4x & \text{si} & x \leq 1 \\ -2x - 1 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \;\rightarrow\; f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x^2 - 4 & \text{si} & x < 1 \\ -2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

$f'(0) = 2 \cdot (0) - 4 = -4.$

$f'(2) = 2$

$f'(1)$ no puede calcularse directamente. Sabemos que para $x = 1$ es continua:

$$\text{DERIVADAS LATERALES:} \left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \rightarrow 1_- & \text{es} & y' = 3x^2 - 4 \rightarrow -1 \\ \text{si } x \rightarrow 1_+ & \text{es} & y' = 2 \rightarrow -2 \end{array}\right.$$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable para este valor (es un *punto anguloso*).