Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas Aplicadas II – Programación Lineal – 05/dic/2014

EJERCICIO 1: [2]

Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón.

Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es de 1,75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro.

Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

EJERCICIO 2: [2]

Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

Una empresa fabrica camisas de manga larga y de manga corta. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa de manga larga que fabrica, y de 6 euros por cada una de manga corta. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las de manga corta han de suponer, al menos, el 60% del total.

¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

EJERCICIO 3: [3]

a) [1,25] Los vértices de un polígono convexo son

$$A\,(-2\,,1)\ ,\ B\,(-2\,,2)\ ,\ C\,(0\,,6)\ ,\ D\,(0\,,1)$$

Determina los puntos de la región delimitada por dicho polígono en los que la función objetivo

$$f(x\,,y) = -4x + 2y + 5$$

alcanza su valor máximo.

Razona si en algún punto del recinto toma la función el valor 5. ¿Y el valor 10?

b) [1,75] Obtenga un sistema de inecuaciones cuya solución sea el recinto anterior.

EJERCICIO 4: [3]

Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$$y \geq 30 \quad ; \quad 3x - y \geq 150 \quad ; \quad 6x + 7y \leq 840$$

a) [0,5] Razone, algebraicamente, si el punto de coordenadas $(80\,,50)$ pertenece al recinto.

b) [2] Represente dicho recinto y halle sus vértices.

c) [0,5] Halle en qué puntos de ese recinto se optimiza la función $F(x\,,y) = x - y$.

EJERCICIO 1:

Organicemos todos los datos en una tabla:

	Almendra (kg/u)	***Azúcar (kg/u)***	***Beneficio(€/u)***	***Nº***
Tortas	0,150	0,050	1,75	*x*
Tabletas	0,100	0,100	1	*y*

- Disponemos de 160 kg azúcar ➡ $0.05x + 0.1y \leq 160$
- Disponemos de 240 kg almendra ➡ $0.15x + 0.1y \leq 240$
- Queremos el máximo beneficio.

Concluimos de aquí:

✔ Objetivo: maximizar $f = 1.75x + y$

✔ Restricciones: debe cumplirse $\left\{\begin{array}{rcl} 0.05x + 0.1y & \leq & 160 \\ 0.15x + 0.1y & \leq & 240 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$

EJERCICIO 2:

Organicemos todos los datos en una tabla:

Camisas	***Beneficio (€/u)***	***Número***
larga	8	*x*
corta	6	*y*

- Hasta 100 000 camisas: ➡ $x + y \leq 100000$
- Manga corta al menos 60% del total: ➡ $y \geq 0.60\,(x + y)$
- Queremos el máximo beneficio.

  Concluimos de aquí:

  ✔ Objetivo: maximizar $f = 8x + 6y$

  ✔ Restricciones: debe cumplirse $\left\{\begin{array}{rcl} x + y & \leq & 100000 \\ y & \geq & 0.60\,(x + y) \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$

EJERCICIO 3:

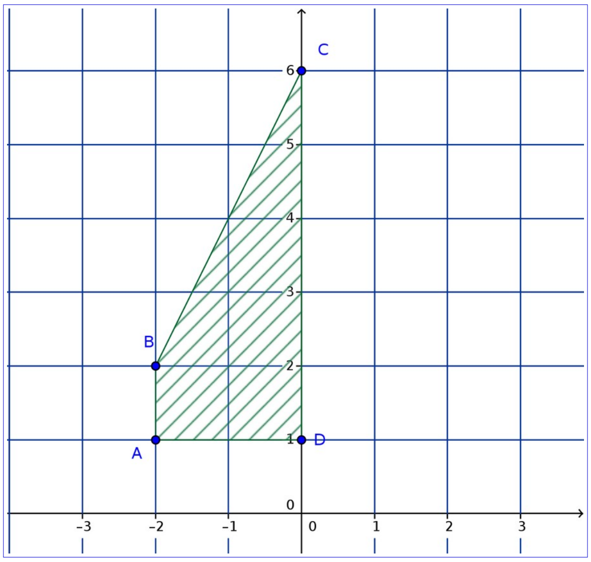
a) Como f es lineal y el recinto es convexo acotado, alcanza sus valores extremos en los vértices.

Vértices		***Función***
$A\,(-2\,,1)$	➡	$f(-2,1) = -4\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 5 = 11$
$B\,(-2\,,2)$	➡	$f(-2,2) = -4\cdot(-2) + 2\cdot 2 + 5 = 17$
$C\,(0\,,6)$	➡	$f(0,6) = -4\cdot 0 + 2\cdot 6 + 5 = 17$
$D\,(0\,,1)$	➡	$f(0,1) = -4\cdot 0 + 2\cdot 1 + 5 = 7$

Tenemos así que es $\max\limits_R f = 17$ y se alcanza en cada punto del lado $\overline{BC}$, y $\min\limits_R f = 3$ alcanzándose en el vértice D.

En ningún punto puede tomar el valor 5, pues está por debajo del mínimo. Pero sí puede tomar el valor 10, pues está comprendido entre el mínimo y el máximo.

b) El recinto lo tenemos aquí dibujado.



Organicemos todo:

Lado	***Ecuación***	***Semiplano***	***Inecuación***
AB	$x = -2$	Derecho	$x \geq -2$
BC	$y = 2x + 6$	Inferior	$y \leq 2x + 6$
CD	$x = 0$	Izquierdo	$x \leq 0$
AD	$y = 1$	Superior	$y \geq 1$

Concluimos que el recinto es el determinado por el conjunto de restricciones anteriores.

Veamos detenidamente la ecuación del lado BC:

$$y = ax + b \left\{ \begin{array}{c} B\,(-2\,,2) \;\to 2 = a\cdot(-2) + b \\ C\,(0\,,6) \;\to 6 = -a\cdot 0 + b \end{array} \right\} \xrightarrow{resolviendo} a = 2\,,\, b = 6 \;\to\; y = 2x + 6$$

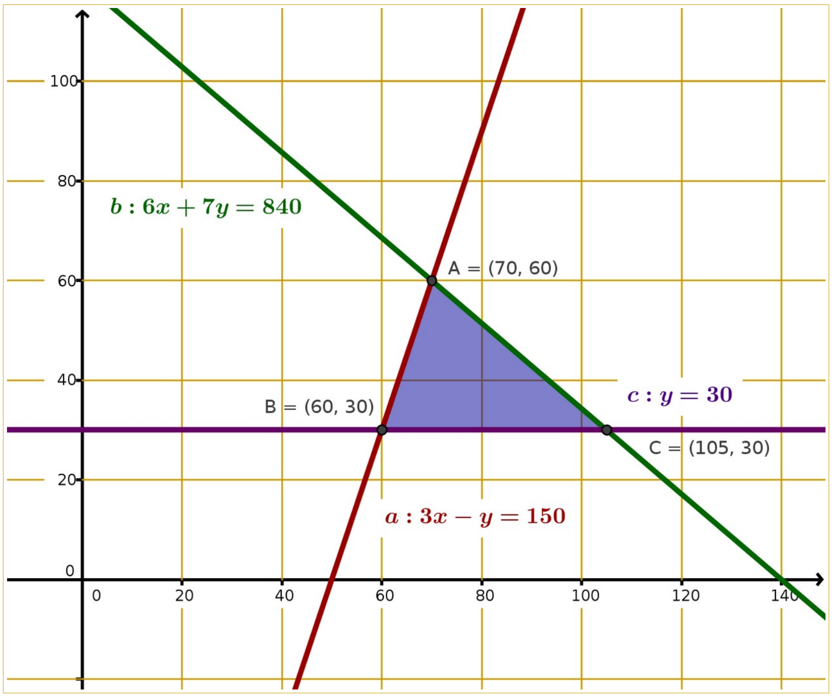
EJERCICIO 4:

a) Veamos si las coordenadas del punto satisfacen las tres inecuaciones:

$$\underbrace{50}_{50} \geq 30 \quad ; \quad \underbrace{3 \cdot 80 - 50}_{160} \geq 150 \quad ; \quad \underbrace{6 \cdot 80 + 7 \cdot 50}_{830} \leq 840$$

Como se cumplen todas, deducimos que el punto está en el recinto.

b) A continuación representamos el recinto, apreciando claramente las coordenadas de sus vértices:



c) Como f es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sus vértices.

Vértices		***Función***
$A\,(70\,,60)$	➡	$f(70\,,60) = 70 - 60 = 10$
$B\,(60\,,30)$	➡	$f(60\,,30) = 60 - 30 = 30$
$C\,(105\,,30)$	➡	$f(105\,,30) = 105 - 30 = 75$

Es $\max\limits_{R} f = 75$ y se alcanza en el vértice C y que $\min\limits_{R} f = 10$ y se alcanza en el vértice A.