Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas Aplicadas II ± Programación Lineal ± 10/dic/2014

EJERCICIO 1:

Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha. a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros la hectárea y el de hortalizas 3000 euros la hectárea, no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halle la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcule dicho máximo.

EJERCICIO 2:

Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

Una empresa fabrica sofás de dos tipos, de dos plazas y de tres plazas, por los que obtiene un beneficio, por unidad, de 1500 y 2000 euros, respectivamente.

Al menos se deben fabricar 6 sofás de tres plazas y 10 de dos plazas, por semana, y además la cantidad de los de tres plazas no debe superar en más de 6 unidades al número de los de dos plazas.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar semanalmente para obtener beneficio máximo, si no se pueden fabricar más de 30 sofás semanalmente?

EJERCICIO 3:

a) [1] Los vértices de un polígono convexo son

$$A(-2\,,1)\ ,\ B(-2\,,3)\ ,\ C(2\,,5)\ ,\ D(2\,,1)$$

Calcular los puntos de la región delimitada por dicho polígono en los que la función objetivo

$$f(x\,,y) = x - 2y - 6$$

alcanza su valor mínimo.

¿Se anula en algún punto del recinto la función? ¿Y puede tomar en algún punto el valor -6.25?

b) [2] Obtenga un sistema de inecuaciones cuya solución sea el recinto anterior.

EJERCICIO 4:

Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$$2x - 3y \leq 6 \quad ; \quad x \geq 2y - 4 \quad ; \quad x + y \leq 8 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$$

a) [0,5] Razone, algebraicamente, si el punto de coordenadas $(1\,,3)$ pertenece al recinto.

b) [2] Represente dicho recinto y halle sus vértices.

c) [0,5] Obtén los valores extremos de la función $F(x\,,y) = 4x - y + 3$ en dicho recinto.

EJERCICIO 1: Sólo vamos a plantearlo.

Organicemos todos los datos en una tabla:

Cultivos	***Coste (€/ha)***	***Beneficio (€/ha)***	***Nº ha***
Cereal	1000	2000	x
Hortalizas	3000	8000	y

- Hasta 10 hectáreas ➡ $x + y \leq 10$
- Hortalizas no más de 5 ha ➡ $y \leq 5$
- Coste total no supera 16000 € ➡ $1000x + 3000y \leq 16000$
- Queremos el máximo beneficio.

Concluimos de aquí:

✔ <u>Objetivo</u>: maximizar $f = 2000x + 8000y$

✔ <u>Restricciones</u>: debe cumplirse
$$\left\{\begin{array}{rcc} x+y & \leq & 10 \\ y & \leq & 5 \\ 1000x+3000y & \leq & 16000 \\ y & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 2:

Organicemos todos los datos en una tabla:

Sofás	***Beneficio (€/u)***	***Número***
2 plazas	1500	x
3 plazas	2000	y

- Número de 3 pl no supera número de 2 pl más 6: ➡ $y \leq x + 6$
- No más de 30 sofás ➡ $x + y \leq 30$
- Al menos 10 de 2 plazas: ➡ $x \geq 10$
- Al menos 6 de 3 plazas: ➡ $y \geq 6$
- Queremos el máximo beneficio.

  Concluimos de aquí:

  ✔ <u>Objetivo</u>: maximizar $f = 1500x + 2000y$

  ✔ <u>Restricciones</u>: debe cumplirse
$$\left\{\begin{array}{rcl} y & \leq & x+6 \\ x+y & \geq & 30 \\ x & \geq & 10 \\ y & \geq & 6 \end{array}\right.$$

 (cc) BY-NC-SA

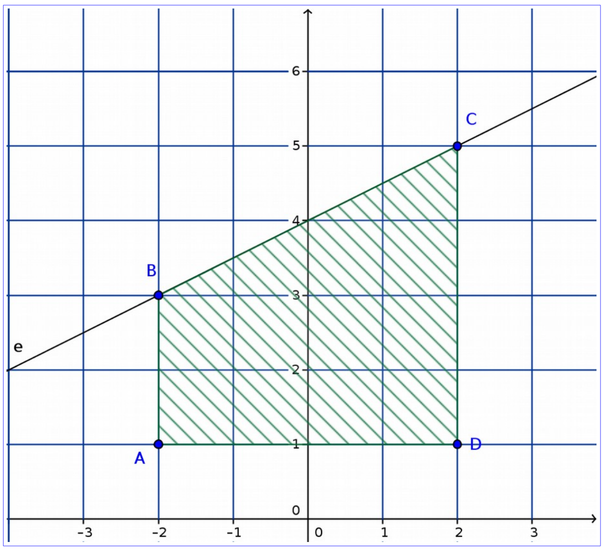
EJERCICIO 3:

a) Como f es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sus vértices.

Vértices		***Función***
$A\,(-2\,,1)$	➡	$f(-2,1) = -2-2\cdot 1-6 = -10$
$B\,(-2\,,3)$	➡	$f\,(-2\,,3) = -2-2\cdot 3-6 = -14$
$C\,(2\,,5)$	➡	$f\,(2\,,5) = 2-2\cdot 5-6 = -14$
$D\,(2\,,1)$	➡	$f\,(2\,,1) = 2-2\cdot 1-6 = -6$

Tenemos así que es $\min\limits_{R} f = -14$ y se alcanza en cada punto del lado $\overline{BC}$. La función no se anula en ningún punto pues cero no está entre los valores mínimo y máximo. Perro sí puede tomar el valor -6.25, pues se encuentra entre dichos valores extremos.

b) El recinto lo tenemos aquí dibujado:



c) Organicemos todo:

Lado	***Ecuación***	***Semiplano***	***Inecuación***
AB	$x=-2$	Derecho	$x \geq -2$
BC	$y = 0.5x+4$	Inferior	$y \leq 0.5x+4$
CD	$x=2$	Izquierdo	$x \leq 2$
AD	$y=1$	Superior	$y \geq 1$

Concluimos que el recinto es el determinado por el conjunto de restricciones anteriores.

Veamos detenidamente la ecuación del lado BC:

$$y = ax+b \left\{ \begin{array}{c} B\,(-2\,,3) \to 3 = a\cdot(-2)+b \\ C\,(2\,,5) \to 5 = a\cdot 2+b \end{array} \right\} \xrightarrow{resolviendo} a=0.5\,,\, b=4 \;\to\; y=0.5x+4$$

 (cc) BY-NC-SA

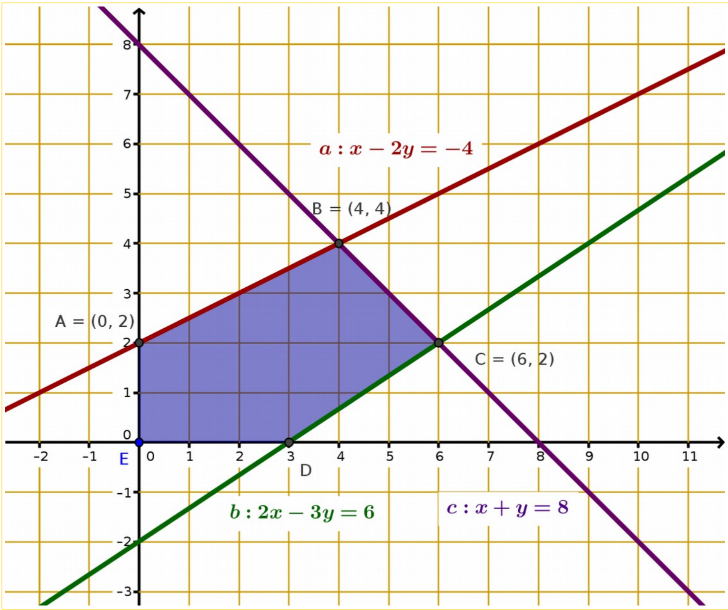
EJERCICIO 4:

a) Veamos si las coordenadas del punto satisfacen las tres inecuaciones:

$$\underbrace{2\cdot 1-3\cdot)}_{-1}\geq 6 \quad ; \quad 1\not\geq \underbrace{2\cdot 3-4}_{2} \quad ; \quad \underbrace{1+3}_{3}\leq 8 \quad ; \quad 1\geq 0 \quad ; \quad 2\geq 0$$

Como no se cumplen todas, deducimos que el punto no está en el recinto.

b) A continuación representamos el recinto, apreciando claramente las coordenadas de sus vértices:



c) Como f es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sus vértices.

Vértices		***Función***
$A\,(0\,,2)$	➡	$f\,(0\,,2)=4\cdot 0-2+3=1$
$B\,(4\,,4)$	➡	$f\,(4\,,4)=4\cdot 4-4+3=15$
$C\,(6\,,2)$	➡	$f\,(6\,,2)=4\cdot 6-2+3=25$
$D\,(3\,,0)$	➡	$f\,(3\,,0)=4\cdot 3-0+3=15$
$E\,(0\,,0)$	➡	$f\,(0\,,0)=4\cdot 0-0+3=3$

Tenemos así que $\max\limits_{R} f=25$, alcanzándose en el vértice C y $\min\limits_{R} f=1$, alcanzándose en el vértice A.

(cc) BY-NC-SA