Nombre:____ ***Curso***:_____
Matemáticas Aplicadas II ±Matrices y Determinantes ±11/11/2014

EJERCICIO 1:

En una urbanización encontramos tres tipos de viviendas: sencillas, normales y de lujo.

Cada vivienda sencilla tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña; cada vivienda normal tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas; cada vivienda de lujo tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.

Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras, cada mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras y cada pequeña 1 cristal y 2 bisagras.

a) [0,5] Escriba una matriz P que indique el número y tamaño de las ventanas de cada tipo de vivienda y otra Q que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) [0,75] Calcule la matriz $P \cdot Q$ e indique el significado de sus filas y columnas.

c) [0,5] Con 40 cristales y 60 bisagras, ¿a qué tipo de vivienda podemos dotar de ventanas?

EJERCICIO 2:

a) [1] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ determine a y b para que se verifique la igualdad $B \cdot A = B$.

b) [0,5] Indique las dimensiones de una matriz E tal que exista $B \cdot E^t \cdot B$.

c) [1,5] Para $a = 0$ y $b = 1$ resuelva la ecuación matricial $XA - 2\mathrm{I} = 3A^t$.

d) [0,5] Para $a = 0$ y $b = 1$ obtenga la matriz A^{2014}.

EJERCICIO 3: Se considera la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x+1 & x & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0,75] Calcule los valores de x para los que existe la inversa de C.

b) [1,25] Para $x = 1$ calcule, si es posible, C^{-1}.

c) [0,5] Para $x = 0$ escriba un grafo cuya matriz de adyacencia sea C.

EJERCICIO 4: Consideremos el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & a+3 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & az & = & 2 \end{array} \right.$$

a) [0,75] Resuelve matricialmente el sistema anterior cuando es $a = 0$.

b) [0,75] ¿Para qué valores de a el sistema es compatible determinado?

c) [0,75] Resuelve para $a = 3$.

EJERCICIO 1:

a) Las matrices pedidas son:

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{L} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & M & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad Q = \begin{array}{c} \\ \mathrm{G} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{P} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matriz producto es:

$$PQ = \begin{array}{c} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{L} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta matriz nos muestras los cristales y las bisagras (columnas) que tiene cada tipo de casa (filas).

c) Se puede dotar una casa simple o una normal, pues tenemos cristales y bisagras de sobra. Pero no una de lujo, pues faltan 78-60=18 bisagras.

EJERCICIO 2:

a) Debe ser $B \cdot A = B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 & -b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left.\begin{array}{r} -a+2 = 2 \\ -b-2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \ a = 0\,, b = -1$$

b) Pongamos que E es $m \times n$. Así, la traspuesta de E es $n \times m$.

Para que pueda multiplicarse $B \cdot E^t \cdot B$ el número de columnas de B debe coincidir con el número de filas de E^t ($2 = n$) y el número de columnas de E^t debe coincidir con el número de filas de B ($m = 1$).

Deberá ser E una matriz 1×2.

c) Ahora es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$XA - 2\mathrm{I} = 3A^t \ \rightarrow \ X \cdot A = 3A^t + 2\mathrm{I} \ \rightarrow \ X = \left(3A^t + 2\mathrm{I}\right) \cdot A^{-1}$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 1 - 0 = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \left(3A^t + 2\mathrm{I}\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Calculemos las primeras potencias:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

Por inducción:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego en particular:

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 3</u>:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(A) = x^2 - x \;\rightarrow\; x^2 + x = 0 \;\rightarrow\; x(x+1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \quad x = 0 \\ \searrow \quad x = -1 \end{array}$$

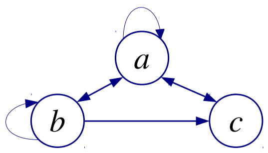
De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lclcl} \text{Si } x = 0 \text{ ó } x = -1 & \rightarrow & \det(C) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } C^{-1} \\ \text{Si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -1 & \rightarrow & \det(C) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } C^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $x = 1$ es A invertible:

$$\left.\begin{array}{l} \det(C) = 1^2 + 1 = 2 \\[2ex] \mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) El grafo asociado es



<u>EJERCICIO 4</u>:

a) El sistema para $a = 0$ expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matriz de los coeficientes es la misma del ejercicio anterior, así:

$$C \cdot X = B \;\rightarrow\; X = C^{-1} \cdot B$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

b) Aplicamos la Regla de Cramer:

$$\det(C) = -a + 2 \rightarrow \begin{cases} a = 2 & \rightarrow & \det(C) = 0 & \rightarrow & S \text{ no es S.C.D.} \\ a \neq 2 & \rightarrow & \det(C) \neq 0 & \rightarrow & S \text{ sí es S.C.D.} \end{cases}$$

c) Por el apartado anterior, sabemos que para $a = 3$ es compatible determinado. Por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{-1} \ , \ y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} \ , \ z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1}$$

Efectuando y simplificando:

$$x = -14 \ , \ y = 6 \ , \ z = 8$$