Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas Aplicadas II - Matrices y Determinantes - 17/11/2014	

✗ Ejercicio 1: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 5 \\ -y \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

a) [2] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + 2\mathrm{I} = 3A^t$.

b) [1] Obtenga la matriz A^{1500}.

c) [1,5] Halle x e y sabiendo que $P^t \cdot A = Q$.

✗ Ejercicio 2: Se considera la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & -3 \\ 4 & 1 & x \end{pmatrix}$$

a) [1,5] ¿Para qué valor de x existe la inversa de C?

b) [1] Para $x = -2$ compruebe que la inversa de C es la matriz

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

✗ Ejercicio 3: Consideremos el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 7 \\ & & ay & - & 3z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & a+3 \end{array} \right.$$

a) [1] Averigüe para qué valores de a es compatible determinado.

b) [0,75] Resuelva el sistema para $a = 1$.

c) [1,25] Exprese y resuelva matricialmente el sistema anterior cuando es $a = -2$.

✗ Ejercicio 1:

a) Observemos que la matriz A es cuadrada y que tiene inversa:

$$\det(A) = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ello para obtener X despejamos como sigue:

$$XA + 2\mathrm{I} = 3A^t \ \rightarrow \ X \cdot A = 3A^t - 2\mathrm{I} \ \rightarrow \ X = \left(3A^t - 2\mathrm{I}\right) \cdot A^{-1}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$$

b) Calculemos las primeras potencias:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \cdots$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Por inducción obtenemos que es:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particular, para $n = 1500$:

$$A^{1500} = \begin{pmatrix} 1 & 3000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Vamos a efectuar las operaciones con las matrices y a igualar.

$$\begin{pmatrix} 5 & -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left.\begin{array}{r} 5 = y \\ 10 - y = x \end{array}\right\} \ \rightarrow \ x = 5\,, y = 5$$

✗ Ejercicio 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero:

$$\det(A) = x^2 + 4x + 3 \ \rightarrow \ x^2 + x = 0 \ \rightarrow \ x^2 + 4x + 3 = 0 \begin{array}{l} \nearrow \ x = -1 \\ \searrow \ x = -3 \end{array}$$

Resulta así:

$$\begin{array}{lllll} \text{Si } x = -1 \text{ ó } x = -3 & \rightarrow & \det(C) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } C^{-1} \\ \text{Si } x \neq -1 \text{ y } x \neq -3 & \rightarrow & \det(C) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } C^{-1} \end{array}$$

b) Colocamos $x = -2$ y multiplicamos la matriz C por la que nos dicen que es su inversa:

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

En efecto, obtenemos la matriz identidad, luego esas matrices son inversas.

✗ Ejercicio 3:

a) Usaremos la Regla de Cramer:

$$\det(C) = 2a + 3 = 0 \to a = -\frac{3}{2} \to \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} & \to & \det(C) = 0 & \to & S \text{ no es S.C.D.} \\ a \neq -\dfrac{3}{2} & \to & \det(C) \neq 0 & \to & S \text{ sí es S.C.D.} \end{cases}$$

b) Usaremos la Regla de Cramer

$$a = 1 \to \det(C) = 5$$

Las soluciones son:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{5} \ , \ y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}}{5} \ , \ z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}}{5}$$

Efectuando y simplificando:

$$x = \frac{11}{5} \ , \ y = -\frac{72}{5} \ , \ z = -\frac{24}{5}$$

c) El sistema expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Observamos que la matriz de los coeficientes es la del apartado (b) del ejercicio anterior. Despejamos:

$$C \cdot X = B \to X = C^{-1} \cdot B$$

Realizando las operaciones:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ 81 \\ -54 \end{pmatrix}$$