Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas Aplicadas II – Aplicaciones de las Derivadas – 4 de marzo de 2013	

EJERCICIO 1:

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión

$$B(x) = 0.5x^2 – 1.5x + 1$$

siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0\,,6]$.

a) [1] Analiza para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas.

b) [1] Estudia en qué situaciones la empresa tendría las mayores pérdidas y los mayores beneficios, calculando a cuánto ascenderían éstas cifras.

c) [0,5] Averigua para qué volúmenes de inversión en publicidad aumentan los beneficios y para cuáles disminuyen.

EJERCICIO 2:

Dada la función $y = x^3 + ax^2 + bx$

a) [1,5] Determine los valores de a y de b sabiendo que dicha función alcanza un extremo relativo en el punto $(2\,,-22)$.

b) [1] Para $a = -3$ y $b = -2$, estudie su curvatura y obtenga las coordenadas de su punto de inflexión.

EJERCICIO 3:

Dada la función

$$f(x) = \frac{5x}{2x-6}$$

a) [0,5] Estudie su continuidad.

b) [0,5] Obtenga sus asíntotas.

c) [1,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 2$.

d) [0,5] ¿Tiene extremos relativos la gráfica de la función?

EJERCICIO 4:

Para la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2+2x+3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) [0,75] Analice algebraicamente la monotonía de f e indique dónde presenta extremos relativos.

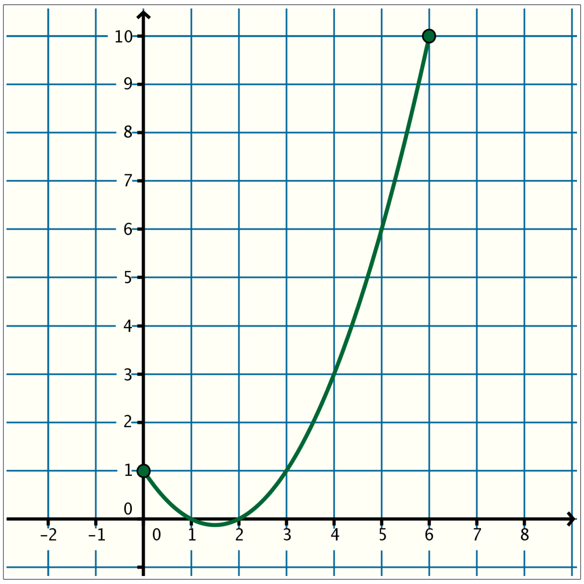
c) [0,75] Dibuje su gráfica.

EJERCICIO 1:

Vamos a dibujar su gráfica: se trata de una parábola cóncava con vértice en

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 1.5 \to y_v = -0.125$$

Con una tabla de valores adecuada:



a) Hay pérdidas cuando B es negativo (gráfica bajo el eje X) y vemos que eso ocurre en el intervalo $(1\,,2)$.

   Así, hay pérdidas al invertir entre 1000 y 2000 euros.

b) En la gráfica apreciamos que el mínimo absoluto es el vértice de la parábola $(1.5\,,-0.125)$ y que el másimo absoluto es el punto $(6\,,10)$.

   Así, el máximo beneficio asciende a 10000 euros cuando se invierten 6000 euros y la mayor pérdida ascienden a 125 euros al invertir 1500 euros en publicidad.

c) Observamos que la parábola decrece en el intervalo $[0\,,1.5]$ y crece en $[1.5\,,6]$.

   Luego al invertir de 0 a 1500 euros el beneficio disminuye y al invertir de 1500 a 6000 el beneficio aumenta.

EJERCICIO 2:

a) Derivamos primero:

$$y = x^3 + ax^2 + bx \ \to \ y' = 3x^2 + 2ax + b$$

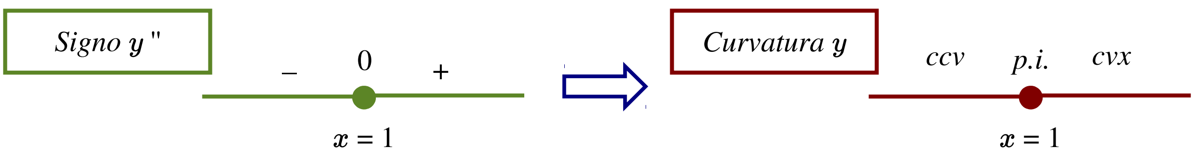
   Como tiene un extremo en el punto $(2\,,-22)$:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{si} & x=2 & \text{es} & y=-22 & \to & 8+4a+2b=-22 \\ \text{si} & x=2 & \text{es} & y'=0 & \to & 12+4a+b=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a=1.5\,, b=-18$$

b) Hallemos primero la derivada segunda:

$$y = x^3 + ax^2 + bx \ \to \ y' = 3x^2 + 2ax + b \ \to \ y'' = 6x + 2a$$

   Estudiamos el signo de la derivada segunda y traducimos:



   Como pasa de cóncava a convexa hay un punto de inflexión en el punto $x = 1\,, y = -4$.

EJERCICIO 3:

a) f sólo puede ser discontinua para los ceros del denominador: $2x-6=0 \to x=3$.

$x=3$

VALOR: si $x=3$ es $y=\left[\dfrac{15}{0}\right]=$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x\to 3_- & \text{es} \quad y\to \left[\frac{15}{-0}\right]=-\infty \\ \text{si } x\to 3_+ & \text{es} \quad y\to \left[\frac{15}{+0}\right]=+\infty \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=3$.

b) Asíntotas verticales: Hay discontinuiad de salto infinito para $x=3$ → $x=3$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x}{2x-6}=\dfrac{5}{2}=2.5$ (grados) → $y=2.5$

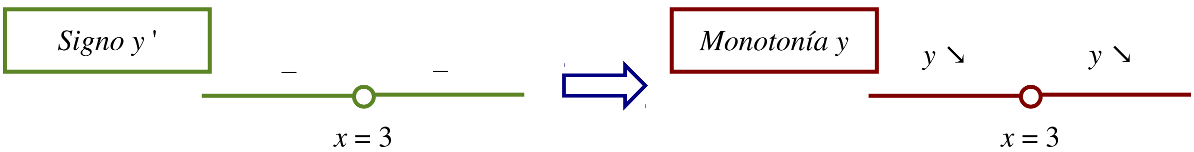
c) Para hallar la ecuación de la recta tangente derivemos primero:

$$f'(x)=\frac{5(2x-6)-2(5x)}{(2x-6)^2}=\frac{-30}{(2x-6)^2}$$

La ecuación de la recta tangente para $x=2$:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\to y-(-5)=-7.5(x-2)\to y=-7.5x+10$$

d) Para averiguar si hay extremos relativos, estudiamos el signo de la derivada primera y así veremos los intervalos de monotonía de la función. Los cambios de monotonía nos indicarán los extremos relativos.



Comprobamos que la derivada siempre es negativa. Por ello, la función nunca cambia de monotonía (nunca crece). De ahí que la función no tenga extremos relativos.

EJERCICIO 4:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x\le 0 \\ -x^2+2x+3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x=0$ (separa-fórmulas):

$x=0$

VALOR: si $x=0$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x\to 0_- & \text{es} \quad y=3-x\to 3 \\ \text{si } x\to 0_+ & \text{es} \quad y=-x^2+2x+3\to 3 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x=0$.

<u>Derivabilidad</u>: podemos derivamos directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ -2x+2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

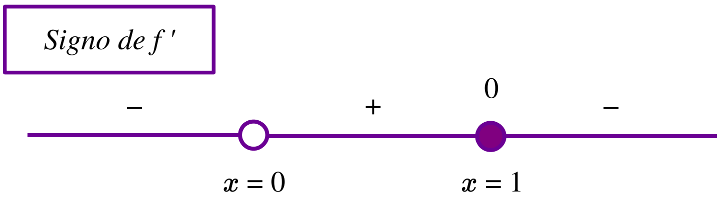
$x = 0$

Como f es continua, puede ser derivable:

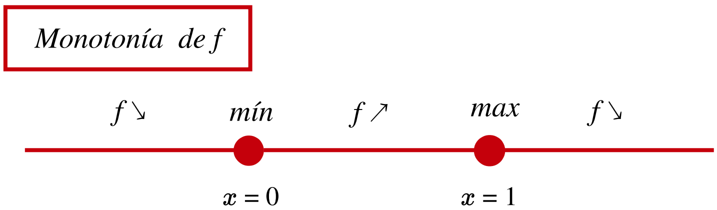
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y' = -1 \to -1 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y' = -2x + 2 \to 2 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (punto anguloso).

b) Estudiamos el signo de la derivada primera. Observemos que para $x = 0$ no hay derivada por ser punto anguloso.



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



c) La forman un trozo de recta ($y = 3 - x\,, x \leq 0$) + un trozo de parábola ($y = -x^2 + 2x + 3\,, x > 0$). El vértice de la parábola lo encontramos para $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1$.

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos: