Nombre:____ ***Curso***:_____		
Matemáticas Aplicadas II – Cálculo de Derivadas – 8 de febrero de 2013		

EJERCICIO 1:

Obtén la función derivada.

a) [0,5] $y = \dfrac{x^2+3}{2x-5}$

b) [0,75] $y = 5x^2 \ln(4x)$

c) [0,75] $y = \mathrm{e}^{3x-1} \operatorname{sen}(x^3)$

d) [0,5] $y = \sqrt{4x^5 + 2\cos(x)}$

EJERCICIO 2:

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln(3x-2) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [2] Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) [1] Representa su gráfica.

EJERCICIO 3:

De la función $y = 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ se sabe que pasa por el punto $P = (2\,,7)$ y que para $x = \dfrac{2}{3}$ se anula su derivada segunda.

¿Cuáles son los valores de a y de b ?

EJERCICIO 4:

Se sabe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto.

a) [1] Averigua el valor de a.

b) [1,5] Calcula $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

EJERCICIO 1:

a) $y' = \dfrac{2x(2x-5)-2(x^2+3)}{(2x-5)^2} = \dfrac{2x^2-10x-6}{(2x-5)^2}$

b) $y' = 10x\ln(4x) + 5x^2 \cdot \dfrac{1}{4x} \cdot 4 = 10x\ln(4x) + 5x$

c) $y' = e^{3x-1} \cdot 3 \cdot \operatorname{sen}(x^3) + \mathrm{e}^{3x-1}\cos(x^3) \cdot 3x^2 = \mathrm{e}^{3x-1}\big(\operatorname{sen}(x^3) + 3x^2\cos(x^3)\big)$

d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^5+2\cos(x)}} \cdot \big(10x^4 - 2\operatorname{sen}(x)\big) = \dfrac{10x^4-2\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{4x^5+2\cos(x)}}$

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln(3x-2) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x=0$ y $x=1$ (separa-fórmulas):

$x = 0$

VALOR: si $x=0$ es $y=1$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y = x^2+2x+1 \to 1 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y = 2x+1 \to 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x=0$.

$x = 1$

VALOR: si $x=1$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1_- & \text{es} \quad y = 2x+1 \to 3 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} \quad y = \ln(3x-2) \to 0 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s=-3$) para $x=1$.

<u>Derivabilidad</u>: podemos derivamos directamente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{3}{3x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$x = 0$

Como f es continua, puede ser derivable:

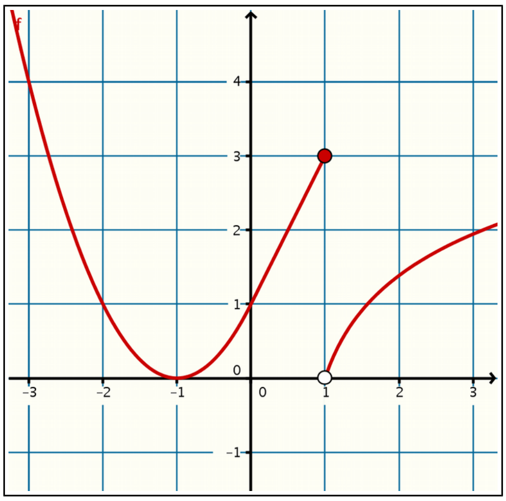
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y' = 2x+2 \to 2 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y' = 2 \to 2 \end{cases}$

Como coinciden concluimos que es derivable para este valor con $f'(0) = 2$.

$x = 1$

Como la función no es continua, no puede ser derivable.

b) La gráfica se compone de un trozo de parábola + trozo de recta + trozo de curva logarítmica. Con unas tablas de valores obtenemos:



EJERCICIO 3:

Derivamos sucesivamente:

$$y = 2x^3 + ax^2 + bx - 3 \to y' = 6x^2 + 2ax + b \to y'' = 12x + 2a$$

Veamos las condiciones:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{si} & x = 2 & \text{es} & y = 7 & \to & 16 + 4a + 2b - 3 = 7 \\ \text{si} & x = \dfrac{2}{3} & \text{es} & y'' = 0 & \to & 12 \cdot \dfrac{2}{3} + 2a = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a = -4\,, b = 5$$

EJERCICIO 4:

a) La función sólo podría ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas):

VALOR: si $x = 1$ es $y = 3$

TENDENCIAS: $\left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \to 1_- & \text{es} & y = x^2 + 2x \to 3 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} & y = ax + 1 \to a + 1 \end{array}\right.$

Como sabemos que es continua, deben coincidir, por ello:

$$a + 1 = 3 \;\to\; a = 2$$

b) Colocamos ya $a = 2$. Podemos derivar directamente:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 + 2x & \text{si} & x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \to f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x + 2 & \text{si} & x < 1 \\ 2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0.$

$f'(2) = 2$

$f'(1)$ no puede calcularse directamente. Sabemos que para $x = 1$ es continua:

DERIVADAS LATERALES: $\left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \to 1_- & \text{es} & y' = 2x + 2 \to 4 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} & y' = 2 \to 2 \end{array}\right.$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable para este valor (es un *punto anguloso*).