Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas Aplicadas II – Cálculo de Derivadas – 4 de febrero de 2013	

EJERCICIO 1:

Obtén la función derivada.

a) [0,5] $y = \dfrac{x^2 - 2}{4x + 5}$

b) [0,75] $y = 4x^3 \ln(5x)$

c) [0,75] $y = \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen}(x^2)$

d) [0,5] $y = \sqrt{2x^5 + \cos(x)}$

EJERCICIO 2:

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 4x + 3 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln(2x - 1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [2] Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) [1] Representa su gráfica.

EJERCICIO 3:

De la función $y = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$ se sabe que pasa por el punto $P = (2\,,3)$ y que para $x = 1$ se anula su derivada segunda.

¿Cuáles son los valores de a y de b ?

EJERCICIO 4:

Se sabe que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto.

a) [1] Averigua el valor de a.

b) [1,5] Calcula $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

EJERCICIO 1:

a) $y' = \dfrac{2x(4x+5) - 4(x^2-2)}{(4x+5)^2} = \dfrac{4x^2+10x+8}{(4x+5)^2}$

b) $y' = 12x^2 \ln(5x) + 4x^3 \cdot \dfrac{1}{5x} \cdot 5 = 12x^2 \ln(5x) + 4x^2$

c) $y' = e^{2x} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(x^2) + \mathrm{e}^{2x} \cos(x^2) \cdot 2x = \mathrm{e}^{2x} \left(2 \operatorname{sen}(x^2) + 2x \cos(x^2)\right)$

d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^5+\cos(x)}} \cdot \left(10x^4 - \operatorname{sen}(x)\right) = \dfrac{10x^4 - \operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{2x^5+\cos(x)}}$

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 4x+3 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \ln(2x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ y $x = 1$ (separa-fórmulas):

$x = 0$

VALOR: si $x = 0$ es $y = 3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y = x^2+4x+3 \to 3 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y = 4x+3 \to 3 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

$x = 1$

VALOR: si $x = 1$ es $y = 7$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1_- & \text{es} \quad y = 4x+3 \to 7 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} \quad y = \ln(2x-1) \to 0 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = -7$) para $x = 1$.

<u>Derivabilidad</u>: podemos derivamos directamente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{2x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$x = 0$

Como f es continua, puede ser derivable:

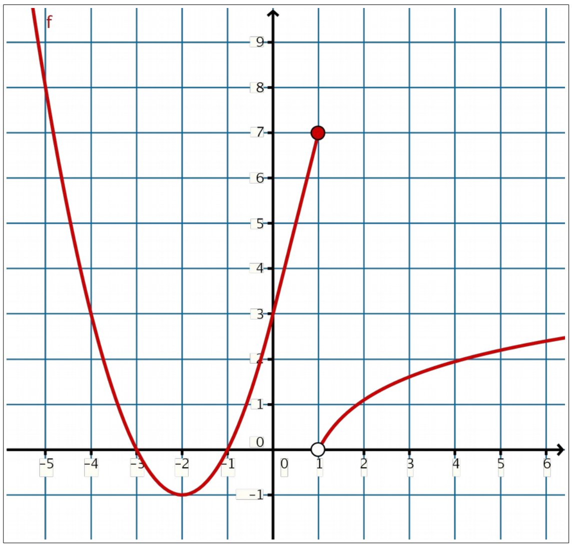
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- & \text{es} \quad y' = 2x+4 \to 4 \\ \text{si } x \to 0_+ & \text{es} \quad y' = 4 \to 4 \end{cases}$

Como coinciden concluimos que es derivable para este valor con $f'(0) = 4$.

$x = 1$

Como la función no es continua, no puede ser derivable.

b) La gráfica se compone de un trozo de parábola + trozo de recta + trozo de curva logarítmica. Con unas tablas de valores obtenemos:



EJERCICIO 3:

Derivamos sucesivamente:

$$y = 2x^3 + ax^2 + bx - 1 \to y' = 6x^2 + 2ax + b \to y'' = 12x + 2a$$

Veamos las condiciones:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{si} & x=2 & \text{es} & y=3 & \to & 16+4a+2b-1=3 \\ \text{si} & x=1 & \text{es} & y''=0 & \to & 12\cdot 1+2a=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resolviendo} a=-6\,, b=6$$

EJERCICIO 4:

a) La función sólo podría ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas):

VALOR: si $x = 1$ es $y = a + 1$

TENDENCIAS: $\left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \to 1_- & \text{es} & y = ax + 1 \to a + 1 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} & y = x^2 - 3x \to -2 \end{array}\right.$

Como sabemos que es continua, deben coincidir, por ello:

$$a + 1 = -2 \ \to \ a = -3$$

b) Colocamos ya $a = -3$. Podemos derivar directamente:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -3x+1 & \text{si} & x \leq 1 \\ x^2 - 3x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \to f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -3 & \text{si} & x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

$f'(-1) = -3$.

$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

$f'(1)$ no puede calcularse directamente. Sabemos que para $x = 1$ es continua:

DERIVADAS LATERALES: $\left\{\begin{array}{lll} \text{si } x \to 1_- & \text{es} & y' = -3 \to -3 \\ \text{si } x \to 1_+ & \text{es} & y' = 2x - 3 \to -1 \end{array}\right.$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable para este valor (es un *punto anguloso*).