***Nombre***:______________________________________________________________ ***Curso***:_____

*Matemáticas Aplicadas II – Programación Lineal – 11/nov/2012*

EJERCICIO 1:

Un comerciante dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0.60 euros/kg y las vende a 0.90 euros/kg, mientras que las del tipo B las compra a 1 euro/kg y las vende a 1.35 euros/kg.

Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?

EJERCICIO 2:

En una carpintería se construyen dos tipos de estanterías: grandes y pequeñas, y se tienen para ello $60\ \mathrm{m}^2$ de tableros de madera. Las grandes necesitan $4\ \mathrm{m}^2$ de tablero y las pequeñas $3\ \mathrm{m}^2$. El carpintero debe hacer como mínimo $3$ estanterías grandes, y el número de pequeñas que haga debe ser, al menos, el doble del número de las grandes. Si la ganancia por cada estantería grande es de $60\ \mathrm{euros}$ y por cada una de las pequeñas es de $40\ \mathrm{euros}$, ¿cuántas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

EJERCICIO 3:

a) [1] Los vértices de un polígono convexo son

$$A\,(-1\,,1)\ ,\ B\,(-1\,,2)\ ,\ C\,(1\,,6)\ ,\ D\,(1\,,1)$$

Calcular los valores extremos de la función objetivo

$$f(x\,,y) = -4x + 2y + 5$$

en la región delimitada por dicho polígono, indicando dónde se alcanzan.

b) [2] Obtenga un sistema de inecuaciones cuya solución sea el recinto anterior.

EJERCICIO 4:

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$7x - y \geq -10 \quad , \quad x + y \leq 2 \quad , \quad 3x - 5y \leq 14$$

a) [0,5] Razone, algebraicamente, si el punto de coordenadas $(1\,,-3)$ pertenece al recinto.

b) [2] Represente dicho recinto y halle sus vértices.

c) [0,5] Calcule el valor máximo de la función $f(x\,,y) = 2x + 3y$ en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

EJERCICIO 1: Sólo vamos a plantearlo.

Organicemos todos los datos en una tabla:

| ***Manzanas*** | ***Coste (€/kg)*** | ***Ingreso (€/kg)*** | ***Nº kilos*** |
|---|---|---|---|
| ***A*** | 0,60 | 0,90 | *x* |
| ***B*** | 1 | 1,35 | *y* |

- Disponemos de 120 euros ➞ $0.60x + y \leq 1200$
- A lo sumo 1500 kg. ➞ $x + y \leq 1500$
- Queremos el máximo beneficio.

Concluimos de aquí:

✔ Objetivo: maximizar $f = 0.50x + 0.35y$

✔ Restricciones: debe cumplirse $\begin{cases} 0.60x + y & \leq & 1200 \\ x + y & \leq & 1500 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$

EJERCICIO 2: Sólo vamos a plantearlo.

Organicemos todos los datos en una tabla:

| ***Estanterías*** | ***Madera ($m^2$)*** | ***Beneficio (€/u)*** | ***Número*** |
|---|---|---|---|
| ***grandes*** | 4 | 60 | *x* |
| ***pequeñas*** | 3 | 40 | *y* |

- Madera hasta 60 metros cuadrados: ➞ $4x + 3y \leq 60$
- Como mínimo 3 estanterías grandes: ➞ $x \geq 3$
- Número de pequeñas al menos doble de número de grandes: ➞ $y \geq 2 \cdot x$
- Queremos el máxima beneficio.

  Concluimos de aquí:

  ✔ Objetivo: maximizar $f = 60x + 40y$

  ✔ Restricciones: debe cumplirse $\begin{cases} 4x + 3y & \leq & 60 \\ x & \geq & 3 \\ y & \geq & 2x \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$

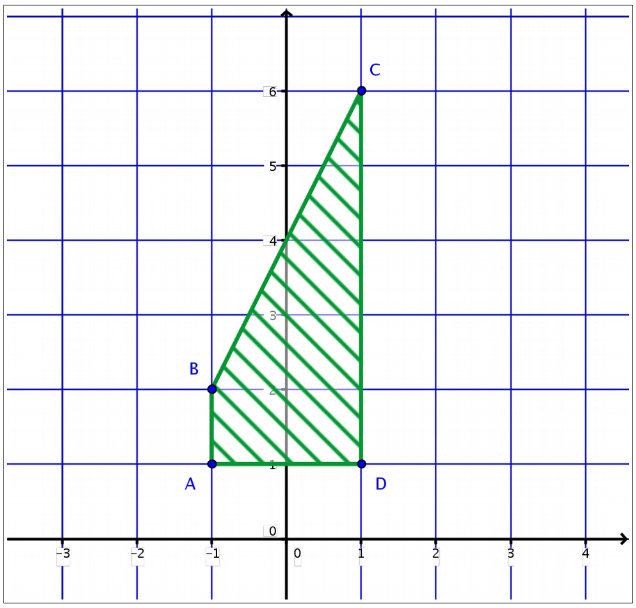
EJERCICIO 3:

a) Como $f$ es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sus vértices.

| ***Vértices*** | | ***Función*** |
|---|---|---|
| $A\,(-1\,,1)$ | ➡ | $f(-1,1)=-4\cdot(-1)+2\cdot 1+5=11$ |
| $B\,(-1\,,2)$ | ➡ | $f(-1,2)=-4\cdot(-1)+2\cdot 2+5=13$ |
| $C\,(1\,,6)$ | ➡ | $f(1,6)=-4\cdot 1+2\cdot 6+5=13$ |
| $D\,(1\,,1)$ | ➡ | $f(1,1)=-4\cdot 1+2\cdot 1+5=3$ |

Tenemos así que es $\max\limits_{R} f=13$ y se alcanza en cada punto del lado $\overline{BC}$, y $\min\limits_{R} f=3$ alcanzándose en el vértice $D$.

b) El recinto lo tenemos aquí dibujado.




c) Organicemos todo:

| ***Lado*** | ***Ecuación*** | ***Semiplano*** | ***Inecuación*** |
|---|---|---|---|
| $AB$ | $x=-1$ | Derecho | $x\geq -1$ |
| $BC$ | $y=2x+4$ | Inferior | $y\leq 2x+4$ |
| $CD$ | $x=1$ | Izquierdo | $x\leq 1$ |
| $AD$ | $y=1$ | Superior | $y\geq 1$ |

Concluimos que el recinto es el determinado por el conjunto de restricciones anteriores.

Veamos detenidamente la ecuación del lado $BC$:

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{\Delta\, y}{\Delta\, y}=\dfrac{4}{2}=2 \\ P\,(1\,,6) \end{array}\right\} \xrightarrow{y-y_0=m\cdot(x-x_0)} y-6=2\cdot(x-1)\ \rightarrow\ y=2x+4$$

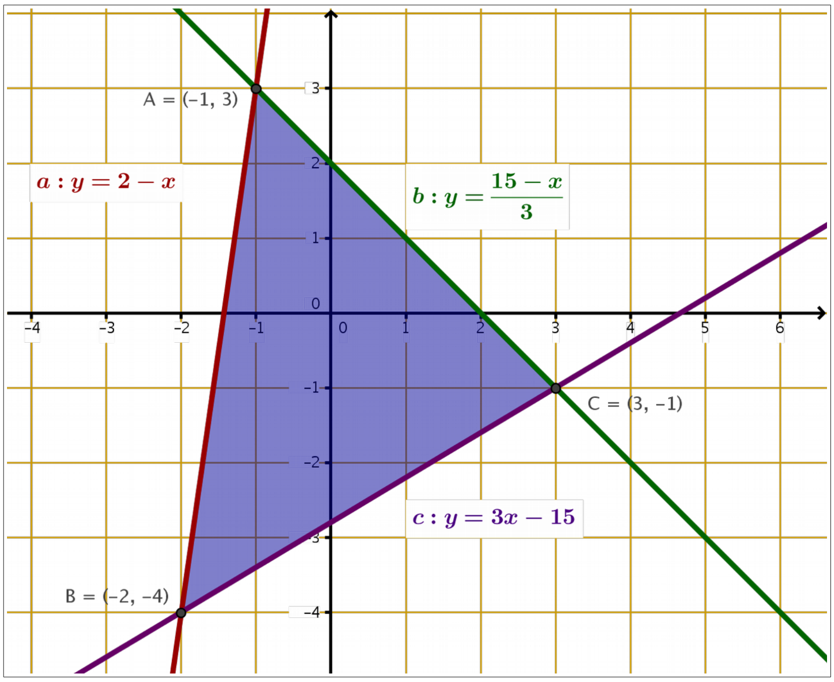
*EJERCICIO 4:*

a) Veamos si las coordenadas del punto satisfacen las tres inecuaciones:

$$\underbrace{7\cdot 1-(-3)}_{10}\geq -10 \quad ; \quad \underbrace{1+(-3)}_{-2}\leq 2 \quad ; \quad \underbrace{3\cdot 1-5\cdot(-3)}_{18}\not\leq 14$$

Como no se cumplen todas, deducimos que el punto no está en el recinto.

b) A continuación representamos el recinto, apreciando claramente las coordenadas de sus vértices:




c) Como $f$ es lineal y la región es un recinto convexo y acotado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sus vértices.

| ***Vértices*** | | ***Función*** |
|---|---|---|
| $A\,(-1\,,3)$ | ➡ | $f(-1,3)=2\cdot(-1)+3\cdot 3=7$ |
| $B\,(-2\,,-4)$ | ➡ | $f(-2,-4)=2\cdot(-2)+3\cdot(-4)=-16$ |
| $C\,(3\,,-1)$ | ➡ | $f(3,-1)=2\cdot 3+3\cdot(-1)=3$ |

Tenemos así que es $\max\limits_{R} f=7$ y se alcanza en el vértice $A$.