Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas Aplicadas II – Matrices y Determinantes – 20/nov/2012

EJERCICIO 1:

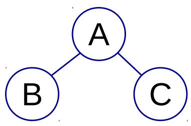
a) [1] Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A , B y C . Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P = \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} , \; Q = \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. ¿Cuáles son los ingresos totales del industrial?

b) [0,5] Consideremos:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



dibuja el grafo de vértices ⓐ, ⓑ, ⓒ cuya matriz de adyacencia es C y escribe la matriz D de adyacencia del grafo no dirigido representado.

EJERCICIO 2:

a) [1,5] Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ determine a y b para que se verifique la igualdad $B \cdot C - D = O$, siendo O la matriz nula.

b) [1,5] Para $a = 1$ y $b = 2$ resuelva la ecuación matricial $BX - 2I_2 = 3B^t$.

c) [0,5] Indique las condiciones mínimas que debe tener una matriz E para que exista el producto $D \cdot E^t$.

EJERCICIO 3: Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

a) [1] Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A .

b) [1,5] Para $x = 3$, calcule, si es posible, A^{-1} .

EJERCICIO 4: Consideremos el sistema

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & a+5 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \\ 3x & + & 3y & & & = & 6 \end{array} \right.$$

a) [1] Resuelve matricialmente el sistema anterior cuando es $a = 1$.

b) [0,75] ¿Para qué valores de a el sistema es compatible determinado?

c) [0,75] Resuelve para $a = 2$.

José Álvarez Fajardo

EJERCICIO 1:

a) La matriz pedida es:

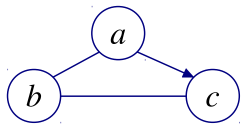
$$P \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.20 & 3.20 \\ 2.75 & 3.90 \\ 2.50 & 3.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2910 & 4184 \\ 1372 & 1972 \end{pmatrix}$$

El elemento de la primera fila y primera columna nos da los ingresos provenientes de la venta de café natural y el de la segunda fila y segunda columna nos da los ingresos provenientes de la venta de descafeinado. La suma de ambos nos dará los ingresos totales del industrial:

$$I = 2910 + 1972 = 4882$$

b) El grafo y la matriz pedidos son:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



EJERCICIO 2:

a) Debe ser $B \cdot C = D$:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-1 \\ 9-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3a-1 & = & 5 & \rightarrow & a = 2 \\ 9-b & = & 10 & \rightarrow & b = -1 \end{array} \right| \rightarrow a = 2\,, b = -1$$

b) Ahora es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si B tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$BX - 2I_2 = 3B^t \;\rightarrow\; B \cdot X = 3B^t + 2I_2 \;\rightarrow\; X = B^{-1} \cdot \left(3B^t + 2I_2\right)$$

B es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(B) = 3 - 2 = 1 \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{Adj}(B)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$3B^t + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = B^{-1} \cdot \left(3B^t + 2I_2\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

(cc) BY-NC-SA

EJERCICIO 3:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(A) = x^2 - x \ \rightarrow \ x^2 - x = 0 \ \rightarrow \ x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

De ahí deducimos:

Si $x = 0$ ó $x = 1 \quad \rightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \rightarrow \quad$ No existe A^{-1}
Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \quad \rightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Sí existe A^{-1}

b) Según lo anterior, para $x = 3$ es A invertible:

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = 3^2 - 3 = 6 \\ \\ \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

a) El sistema para $a = 1$ expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matriz de los coeficientes es la misma del ejercicio anterior, así:

$$C \cdot X = B \ \rightarrow \ X = C^{-1} \cdot B$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Aplicamos la Regla de Cramer:

$$\det(C) = 6a \rightarrow \begin{cases} a = 0 & \rightarrow & \det(C) = 0 & \rightarrow & S \text{ no es S.C.D.} \\ a \neq 0 & \rightarrow & \det(C) \neq 0 & \rightarrow & S \text{ sí es S.C.D.} \end{cases}$$

c) Por el apartado anterior, sabemos que para $a = 2$ es compatible determinado. Por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{12} \ , \ y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}}{12} \ , \ z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}}{12}$$

Efectuando y simplificando:

$$x = 0 \ , \ y = 2 \ , \ z = -1$$

(cc) BY-NC-SA