Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas Aplicadas II – Matrices y Determinantes – 20/nov/2012

EJERCICIO 1:

Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) [0,25] Presente en una matriz M , de dimensión 3×2 , las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) [0,25] Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) [1,5] Calcule los productos $M \cdot A$ y $M \cdot B$ e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

EJERCICIO 2: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

a) [1,5] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = A$

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - A^2 = I_2$

EJERCICIO 3: Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [1] Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1} .

b) [1,5] Calcule A^{-1} para $m = 2$.

EJERCICIO 4: Consideremos el sistema

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & & & - & z & = & 7 \\ & & 2y & - & 6z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & a+3 \end{array} \right.$$

a) [1] Expresa y resuelve matricialmente el sistema anterior cuando es $a = 1$.

b) [0,75] Averigua para qué valores de a es compatible determinado.

c) [0,75] Resuelve para $a = 3$.

EJERCICIO 1:

Las matrices pedidas son:

$$M = \begin{array}{c} \\ \text{HU} \\ \text{AZ} \\ \text{HA} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad A = \begin{array}{c} \\ \text{G} \\ \text{P} \end{array}\!\! \begin{array}{c} R1 \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad B = \begin{array}{c} \\ \text{G} \\ \text{P} \end{array}\!\! \begin{array}{c} R2 \\ \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M \cdot A = \begin{array}{c} \\ \text{HU} \\ \text{AZ} \\ \text{HA} \end{array}\!\! \begin{array}{c} R1 \\ \begin{pmatrix} 70 \\ 190 \\ 4400 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M \cdot B = \begin{array}{c} \\ \text{HU} \\ \text{AZ} \\ \text{HA} \end{array}\!\! \begin{array}{c} R2 \\ \begin{pmatrix} 80 \\ 210 \\ 4600 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenemos así que el reparto 1 sí es posible, pero no el reparto 2 (no hay suficiente cantidad de azúcar).

EJERCICIO 2:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A ;

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 & -4+2b \\ a-1 & 3-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -a+2 & = & -1 & \rightarrow & a=3 \\ -4+2b & = & -6 & \rightarrow & b=-1 \\ a-1 & = & 2 & \rightarrow & a=3 \\ 3-b & = & 4 & \rightarrow & b=-1 \end{array} \right| \rightarrow a=3\,, b=-1$$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$A \cdot X - A^2 = I_2 \;\rightarrow\; A \cdot X = I_2 + A^2 \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot \left(I_2 + A^2\right)$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = -4+12 = 8 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$I_2 + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & -18 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = A^{-1} \cdot \left(I_2 + A^2\right) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & -42 \\ 14 & 31 \end{pmatrix}$$

Si queremos:

$$X = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{21}{4} \\[2ex] \dfrac{7}{4} & \dfrac{31}{8} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3: Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(A) = -m^2 + m + 6 \ \rightarrow \ -m^2 + m + 6 = 0 \ \rightarrow \ m = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{matrix} \nearrow & m = -2 \\ \searrow & m = 3 \end{matrix}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lllll} \text{Si } m = -2 \text{ ó } m = 3 & \rightarrow & \det(A) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } A^{-1} \\ \text{Si } m \neq -2 \text{ y } m \neq 3 & \rightarrow & \det(A) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } A^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $m = 2$ es A invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = -2^2 + 2 + 6 = 4 \\ \\ \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

a) El sistema para $a = 1$ expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matriz de los coeficientes es la misma del ejercicio anterior, así:

$$C \cdot X = B \ \rightarrow \ X = C^{-1} \cdot B$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -9/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

b) Aplicamos la Regla de Cramer:

$$\det(C) = 2a + 2 \rightarrow \begin{cases} a = -1 & \rightarrow \ \det(C) = 0 \ \rightarrow \ S \text{ no es S.C.D.} \\ a \neq -1 & \rightarrow \ \det(C) \neq 0 \ \rightarrow \ S \text{ sí es S.C.D.} \end{cases}$$

c) Por el apartado anterior, sabemos que para $a = 3$ es compatible determinado. Por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{8} \ , \ y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}}{8} \ , \ z = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}}{8}$$

Efectuando y simplificando:

$$x = \frac{13}{4} \ , \ y = \frac{33}{4} \ , \ z = \frac{11}{4}$$