Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas Aplicadas II – Sistemas de Ecuaciones – A

EJERCICIO 1: Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+3z & = & 3 \\ -2x+3y-z & = & 1 \\ 5x-9y+10z & = & 8 \end{array}\right.$$

a) [2] Resuélvalo por el método de Gauss y clasifíquelo.

b) [0,5] ¿Existe alguna solución en la que sea $y=z+1$?

c) [0,5] Cambie una ecuación de forma que el sistema S' obtenido sea incompatible.

EJERCICIO 2: Consideremos el sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x-2y & = & -2 \\ 2x+5y & = & 24 \\ -x+7y & = & 7 \end{array}\right.$$

a) [1,5] Resuélvalo y clasifíquelo.

b) [1,5] Interprételo geométricamente.

EJERCICIO 3:

Una tienda ofrece tres tipos de pinturas: interior lisa a cuatro euros el kilo, interior rugosa a un euro menos y exterior a cinco euros el kilo. Un cliente ha pagado 470€ por los 120 kilos de pintura que se ha llevado.

Averigüe cuántos kilos de clase adquirió sabiendo que se llevó para exterior la mitad de la que compró para interior.

EJERCICIO 4:

En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, una alumna obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40% más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones de los otros.

¿Cuál fue la puntuación de cada problema?

EJERCICIO 1:

a) Veamos su resolución por Gauss:

$$S \xrightarrow[\substack{e_2'=2e_1+e_2\\ e_3'=-5e_1+e_3}]{e_1'=e_1} \left\{\begin{array}{rcr} x-2y+3z &=& 3\\ -y+5z &=& 7\\ y-5z &=& -7 \end{array}\right. \xrightarrow[e_3'=e_3+e_2]{\substack{e_1'=e_1\\ e_2'=e_2}} \left\{\begin{array}{rcr} x-2y+3z &=& 3\\ -y+5z &=& 7\\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

Tenemos que el sistema es compatible indeterminado. Resolvamos escalonadamente.

$$\left\{\begin{array}{l} e_3 : z = t\\ e_2 : y = 5t-7\\ e_1 : x = 3-3t+2(5t-7) \to x = 7t-11 \end{array}\right.$$

La solución es:

$$(x\,,y\,,z) = (7t-11\,,5t-7\,,t) \ \ ,t\in\mathbb{R}$$

b) Si deseamos que $y = z+1$, igualando en la solución:

$$y = z+1 \to 5t-7 = t+1 \to 4t = 8 \to t = 2$$

Sustituyendo ese valor en la solución de (a) obtenemos:

$$(x\,,y\,,z) = (3\,,3\,,2)$$

c) Cambiemos, por ejemplo, la tercera ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+3z &=& 3\\ -2x+3y-z &=& 1\\ x-2y+3z &=& 1 \end{array}\right.$$

Este nuevo sistema no tiene solución, pues la primera y la tercera ecuación son claramente incompatibles: las mismas operaciones no pueden dar resultados distintos.

EJERCICIO 2:

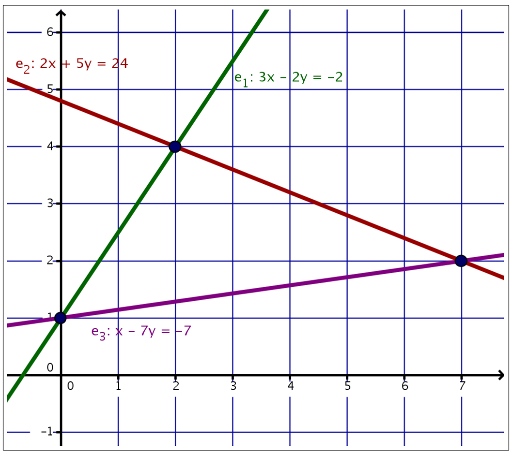
a) Resolvemos por reducción el sistema formado por las dos últimas ecuaciones:

$$\{e_2\,,e_3\} \to \left\{\begin{array}{rcr} 2x+5y &=& 24\\ -2x+14y &=& 14 \end{array}\right. \xrightarrow[e_2'=e_2+e_1]{e_1'=e_1} \left\{\begin{array}{rcr} 2x+5y &=& 24\\ 19y &=& 38 \end{array}\right. \xrightarrow{despejando} \left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=2 \end{array}\right.$$

Y ahora comprobamos esa solución en la primera ecuación:

$$3\cdot 7 - 2\cdot 2 \neq -2$$

Como vemos, el sistema es incompatible.



b) Con unas tablas de valores adecuadas obtenemos el gráfico de aquí al lado.

Cada ecuación se representa en el plano como una recta, siendo cada uno de sus puntos es una solución de la correspondiente ecuación.

Se trata de tres rectas secantes secantes dos a dos, pero las tres a la vez no se cortan en ningún punto común.

EJERCICIO 3:

Llamemos

x al nº de kilos de interior lisa

y al nº de kilos de interior rugosa

z al nº de kilos de exterior

El total de kilos es 120: $x + y + z = 120$

El total de dinero pagado es 470€: $4x + 3y + 5z = 470$

El nº de kilos de exterior es la mitad del de interior: $z = \dfrac{x+y}{2}$

Simplificando adecuadamente obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y + z &=& 120 \\ 4x + 3y + 5z &=& 470 \\ x + y - 2z &=& 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = (30\,,40\,,50)$$

Así, adquirió 30 kilos de pintura interior lisa, 40 de interior rugosa y 50 kilos de pintura exterior.

EJERCICIO 4:

Llamemos

x al nº puntos del primer problema

y al nº puntos del segundo problema

z al nº puntos del tercer problema

La puntuación total es 7.2:

$$x + y + z = 7.2$$

La puntuación del 1º es un 40% más que la puntuación del segundo:

$$x = 1.40 \cdot y$$

La puntuación del 3º es el doble de la suma de la puntuación de los otros dos:

$$z = 2 \cdot (x + y)$$

Simplificando adecuadamente obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y + z &=& 7.2 \\ x - 1.4y &=& 0 \\ 2x + 2y - z &=& 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = (1.4\,,1\,,4.8)$$

Así, las puntuaciones fueron 1.4, 1 y 4.8 puntos, respectivamente.