| | |
|---|---|
| ***Nombre:*** ______________________________________________ ***Curso 2º*** ___ <br> Análisis – Mates Aplicadas II – 12/03/2012 | |

✗ Ejercicio 1[2]: El beneficio obtenido por la producción y venta de $x$ kilogramos de un artículo viene dado por la función:

$$f(x)=-0{,}01\,x^2+3{,}6\,x-180$$

a) [0,75] Represente gráficamente esta función.

b) [0,5] Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

c) [0,75] Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender para que la empresa no tenga pérdidas.

✗ Ejercicio 2 [2,5]: Dada la función $f(x)=x^3+a\,x^2+c$

a) [1,5] Determine los valores de "$a$" y "$c$" sabiendo que dicha función alcanza un extremo relativo en el punto $(-1,3)$.

b) [1] Para $a=-3$ , $c=3$, estudie su curvatura y obtenga las coordenadas de su punto de inflexión.

✗ Ejercicio 3 [3]: Dada la función

$$f(x)=\frac{1-6x}{2x-4}$$

a) [0,5] Estudie su continuidad.

b) [0,5] Obtenga sus asíntotas.

c) [1,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ para $x=3$ .

d) [0,5] ¿Tiene extremos relativos la gráfica de la función?

✗ Ejercicio 4 [2,5]: Para la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x<0 \\ -x+3 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) [0,75] Analice la monotonía de $f$ e indique en qué puntos presenta extremos relativos.

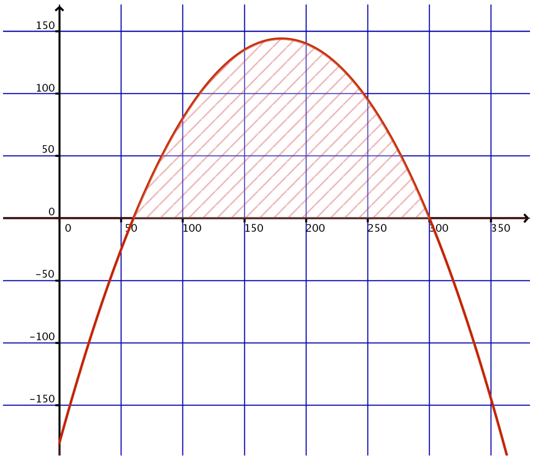
c) [0,75] Dibuje su gráfica.

✗ <u>Ejercicio 1</u>:

a) Se trata de una parábola cóncava con vértice para El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-3{,}6}{-0{,}02}=180 \quad \rightarrow \quad y_V=144$$

Con una tabla de valores adecuada:




b) El máximo absoluto se alcanza en el vértice la parábola: debe producir y vender 180 kg para obtener el máximo beneficio.

c) Hay beneficios cuando *B* es positivo (gráfica sobre el eje X) y pérdidas cuando *B* es negativo (gráfica bajo el eje X).

Si no vemos bien los valores de corte:

$$-0{,}01x^2+3{,}6x-180=0 \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x=60 \\ x=300 \end{array} \right.$$

Tenemos así que debe vender y producir entre 60 y 300 kg. para no obtener pérdidas

✗ <u>Ejercicio 2</u>:

a) Es $y=x^3+ax^2+c \quad \rightarrow \quad y'=3x^2+2ax$

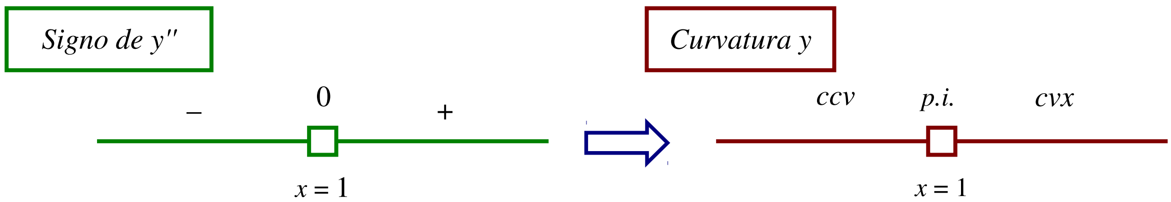
Pasa por el punto $(-1,3)$ ⇨ si $x=-1$ es $y=3$ ⇨ $-1+a+c=3 \quad (^*)$

Extremo relativo en $(-1,3)$ ⇨ si $x=-1$ es $y'=0$ ⇨ $3-2a=0 \quad (^{**})$

De (**) obtenemos que es $a=-1{,}5$ y sustituyendo en (*) resulta $c=2{,}5$.

b) Es $y=x^3-3x^2+3 \quad \rightarrow \quad y'=3x^2-6x \quad \rightarrow \quad y''=6x-6$

Primero estudiamos el signo de la derivada segunda, así tendremos los intervalos de curvatura de la función. Donde haya cambio en la curvatura estarán los puntos de inflexión:




Sustituyendo en la fórmula de la función: $x=1 \quad \rightarrow \quad y=1-3+3=1$ . Concluimos que el punto de inflexión de la gráfica es el $(1,1)$ .

✗ <u>Ejercicio 3</u>:

a) $f$ sólo puede ser discontinua para los ceros del denominador: $x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=2$

$\boxed{x=2}$

VALOR: si $x=2$ es $y=\left[\frac{-11}{0}\right]=$ No existe

TENDENCIAS: $\left\{ \begin{array}{l} \text{si} \quad x\rightarrow 2- \quad \text{es} \quad y\rightarrow +\infty \\ \text{si} \quad x\rightarrow 2+ \quad \text{es} \quad y\rightarrow -\infty \end{array} \right.$

Concluimos que $f$ tiene una discontinuidad de salto infinito para $x=2$.

b) Asíntotas verticales: Hay salto infinito para $x = 2$ $\rightarrow$ $x = 2$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-6x}{2x-4} = \frac{-6}{2} = -3$ (grados) $\rightarrow$ $y = -3$

c) Para hallar la ecuación de la recta tangente derivemos primero:

$$f'(x) = \frac{-6\cdot(2x-4)-2\cdot(1-6x)}{(2x-4)^2} = \frac{22}{(2x-4)^2}$$

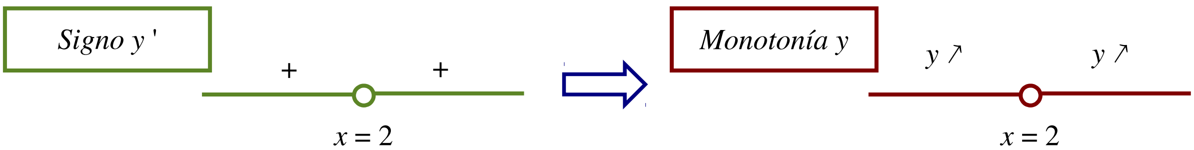
La ecuación de la recta tangente para $x = a$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En este caso, para $a = 3$:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \quad \rightarrow \quad y-(-8{,}5) = -5{,}5(x-3) \quad \rightarrow \quad y = -5{,}5x - 2{,}5$$

d) Para averiguar si hay extremos relativos, estudiamos el signo de la derivada primera y así veremos los intervalos de monotonía de la función. Los cambios de monotonía nos indicarán los extremos relativos.




Comprobamos que la derivada siempre es positiva. Por ello, la función nunca decrece. De ahí que la función no tenga extremos relativos.

✗ Ejercicio 4:

a) Continuidad: $f$ sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (cambio de fórmula):

$\boxed{x=0}$

VALOR: si $x=0$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y = x^2+4x+3 \to 3 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y = -x+3 \to 3 \end{cases}$

Concluimos que también es continua en $x = 0$.

Derivabilidad: podemos derivar directamente

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<0 \\ -1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente en el cambio de fórmula

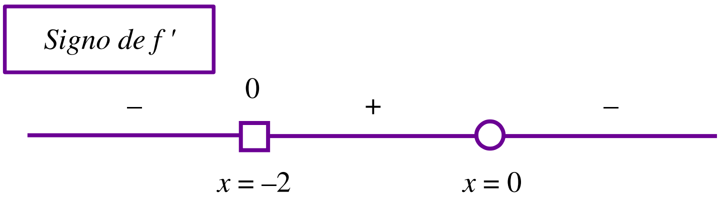
$\boxed{x=0}$

Como $f$ es continua, puede ser derivable:

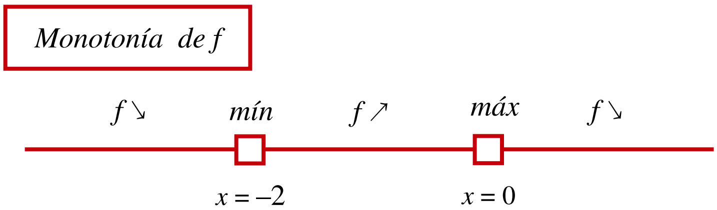
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y' = 2x+4 \to 4 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y' = -1 \to -1 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable para $x = 0$ (es un *punto anguloso*).

b) Estudiamos el signo de la derivada primera. Observemos que para $x = 0$ no hay derivada por ser punto anguloso.




De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:




c) La forman un trozo de parábola ( $y=x^2+4x+3$ si $x<0$ ) + un trozo de recta ( $y=-x+3$ , $x\geq 0$ ).

El vértice de la parábola lo encontramos para $x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos: