Nombre: ____ *Curso 2º* ___	
Análisis – Mates Aplicadas II – 09/03/2010	

✗ Ejercicio 1[2]: El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675 \quad , \quad x \geq 0$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) [0,75] Represente gráficamente la función B .

b) [0,75] Calcule el gasto a partir del cual la empresa entra en pérdidas.

c) [0,5] ¿Cuánto debe gastar en publicidad la empresa para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende ese máximo beneficio?

✗ Ejercicio 2 [2]: Sea la función $g(x) = x^3 + ax^2 + b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto $(2, 5)$.

✗ Ejercicio 3 [3]: Dada la función

$$f(x) = \frac{4x - 1}{x - 3}$$

a) [0,5] Estudie su continuidad.

b) [0,5] Obtenga sus asíntotas.

c) [1,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 2$.

d) [0,5] ¿Tiene extremos relativos la gráfica de la función?

✗ Ejercicio 4 [3]: Para la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) [0,5] Analice la monotonía de f e indique en qué puntos presenta extremos relativos.

c) [0,5] ¿Se anula la derivada en esos extremos?

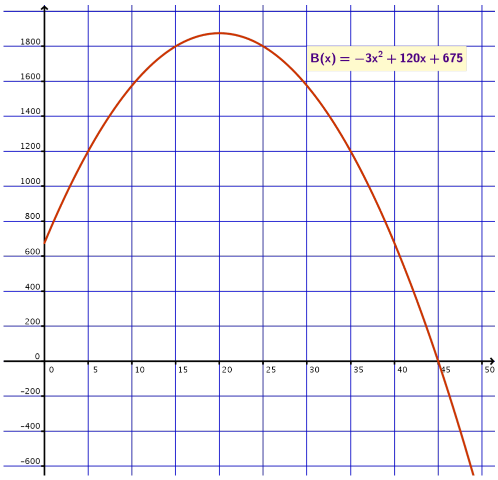
d) [1] Dibuje su gráfica.

✗ <u>Ejercicio 1</u>:

a) Se trata de una parábola cóncava con vértice para El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-120}{-6}=20 \quad \rightarrow \quad y_V=1875$$

Con una tabla de valores adecuada:



b) Hay beneficios cuando *B* es positivo (gráfica sobre el eje X) y pérdidas cuando *B* es negativo (gráfica bajo el eje X).

Vemos en la gráfica que hay beneficios para un gasto en publicidad comprendido entre 0 y 45000 €, y pérdidas a partir de 45000 €.

c) El máximo absoluto se alcanza en el vértice la parábola.

Así, obtiene un beneficio máximo de 1875000 € cuando invierte 20000 € en publicidad.

✗ <u>Ejercicio 2</u>: Es $y=x^3+ax^2+b \quad \rightarrow \quad y'=3x^2+2ax \quad \rightarrow \quad y''=6x+2a$

Pasa por el punto $(2,5)$ ⇨ si $x = 2$ es $y = 5$ ⇨ $8+4a+b=5 \quad (*)$

Inflexión en $(2,5)$ ⇨ si $x = 2$ es $y'' = 0$ ⇨ $12+2a=0 \quad (**)$

De (**) obtenemos que es $a = -6$ y sustituyendo en (*) resulta $b = 21$.

✗ <u>Ejercicio 3</u>:

a) f sólo puede ser discontinua para los ceros del denominador: $x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=3$

$\boxed{x=3}$

VALOR: si $x=3$ es $y=\left[\frac{11}{0}\right]=$ No existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\rightarrow 3- \quad \text{es} \quad y\rightarrow -\infty \\ \text{si} \quad x\rightarrow 3+ \quad \text{es} \quad y\rightarrow +\infty \end{cases}$

Concluimos que f tiene una discontinuidad de salto infinito para $x = 3$.

b) Asíntotas verticales: Hay salto infinito para $x = 3$ → $x = 3$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{4x-1}{x-3}=\frac{4}{1}=4$ (grados) → $y = 4$

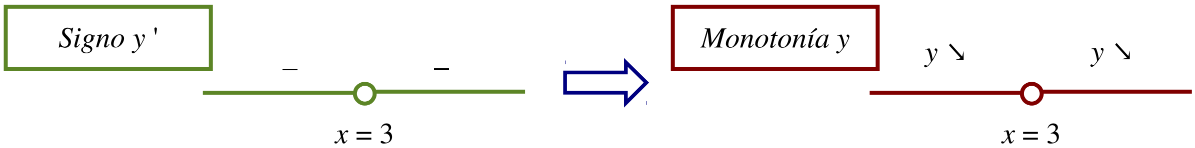
c) Para hallar la ecuación de la recta tangente derivemos primero:

$$f'(x)=\frac{4\cdot(x-3)-1\cdot(4x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-11}{(x-3)^2}$$

La ecuación de la recta tangente para $a = 2$:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \quad \rightarrow \quad y-(-7)=-11(x-2) \quad \rightarrow \quad y=-11x+15$$

d) Para averiguar si hay extremos relativos, estudiamos el signo de la derivada primera y así veremos los intervalos de monotonía de la función. Los cambios de monotonía nos indicarán los extremos relativos.



Comprobamos que la derivada siempre es negativa. Por ello, la función nunca crece. De ahí que la función no tenga extremos relativos.

✗ <u>Ejercicio 4</u>:

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (cambio de fórmula):

$\boxed{x=0}$

VALOR: si $x=0$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y=x+3\to 3 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y=x^2-4x+3\to 3 \end{cases}$

Concluimos que también es continua en $x = 0$.

<u>Derivabilidad</u>: podemos derivar directamente

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente en el cambio de fórmula

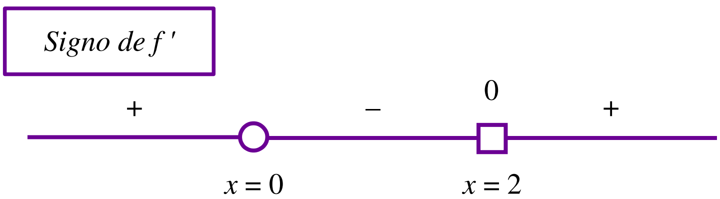
$\boxed{x=0}$

Como f es continua, puede ser derivable:

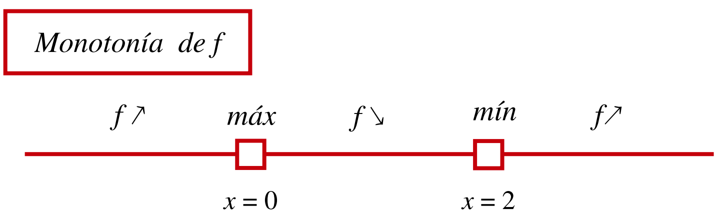
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y'=1\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y'=2x-4\to -4 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable para $x = 0$ (es un *punto anguloso*).

b) Estudiamos el signo de la derivada primera. Observemos que para x = 0 no hay derivada por ser punto anguloso.



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



c) En $x = 0$ hay un máximo relativo, pero la derivada no puede ser nula porque, como es un punto anguloso, no hay derivada.

En $x = 2$ hay un mínimo relativo, y la derivada ahí sí es cero: $f'(2)=2\cdot 2-4=0$.

d) La forman un trozo de recta ($y=x+3$, $x<0$) + un trozo de parábola ($y=x^2-4x+3$ si $x\geq 0$).

El vértice de la parábola lo encontramos para $x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos: