Nombre:* ____ *Curso 2º Cálculo de Derivadas – Mates Aplicadas II – 23/02/2012	

✗ Ejercicio 1 [2]: Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{3x-1}$

b) $g(x)=5x^3\,\text{sen}(2x+1)$

c) $h(x)=\sqrt{x^4-\cos x}$

d) $p(x)=x\cdot\ln(2x+1)$

✗ Ejercicio 2 [3]: Si definimos

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x\le -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ x^2-4x+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Estudia su derivabilidad.

b) Calcula $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

c) Dibuja su gráfica.

✗ Ejercicio 3 [2]: Consideremos

$$f(x)=ax^3+bx^2+x$$

Determine el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene derivada nula para $x=1$ y que $f(1)=2$.

✗ Ejercicio 4 [3]: Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)e^{2x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+ax+b & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Halla a y b sabiendo que es derivable en todo punto.

b) Obtén la función derivada.

✗ Ejercicio 1:

a) Derivamos un cociente y usamos la regla de la cadena:

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{3x-1} \xrightarrow{D} f'(x)=\frac{e^{2x}\cdot 2\cdot(3x-1)-3\cdot e^{2x}}{(3x-1)^2}=\frac{e^{2x}\cdot(6x-5)}{(3x-1)^2}$$

b) Derivamos un producto y usamos la regla de la cadena:

$$g'(x)=15x^2\cdot \operatorname{sen}(2x+1)+\cos(2x+1)\cdot 2\cdot 5x^3=15x^2\operatorname{sen}(2x+1)+10x^3\cos(2x+1)$$

c) Es la derivada de una raíz (regla de la cadena):

$$h(x)=\sqrt{x^4-\cos x} \xrightarrow{D} h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^4-\cos x}}\cdot(4x^3+\operatorname{sen} x)=\frac{(4x^3+\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{x^4-\cos x}}$$

d) Es la derivada de un producto y usamos la regla de la cadena

$$p(x)=x\cdot\ln(2x+1) \xrightarrow{D} p'(x)=1\cdot\ln(2x+1)+\frac{1}{(2x+1)}\cdot 2\cdot x=\ln(2x+1)+\frac{2x}{(2x+1)}$$

✗ Ejercicio 2:

a) Previamente vamos a estudiar su continuidad. Luego la derivabilidad propiamente dicha.

Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = -1$ y $x = 1$ (cambios de fórmula). En ellos:

$\boxed{x=-1}$

VALOR: si $x=-1$ es $y=-2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x\to -1- \text{ es } y=\dfrac{2}{x}\to -2 \\ \text{si } x\to -1+ \text{ es } y=x+1\to 0 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito (2 unidades) para $x = -1$.

$\boxed{x=1}$

VALOR: si $x=1$ es $y=2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x\to 1- \text{ es } y=x+1\to 2 \\ \text{si } x\to 1+ \text{ es } y=x^2-4x+5\to 2 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 1$.

Derivabilidad: podemos derivar directamente

$$f'(x)=\begin{cases} -2/x^2 & \text{si} & x<-1 \\ 1 & \text{si} & -1<x<1 \\ 2x-4 & \text{si} & x>1 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente en los cambios de fórmula:

$\boxed{x=-1}$

Como f no es continua no puede ser derivable.

$\boxed{x=1}$

Como f es continua puede ser derivable. Veamos las

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y'=1\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y'=2x-4\to -2 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable para este valor (es un *punto anguloso*).

b) $f'(-2)=\dfrac{-2}{(-2)^2}=-0{,}25$

$f'(-1)=$ No existe

$f'(0)=1$

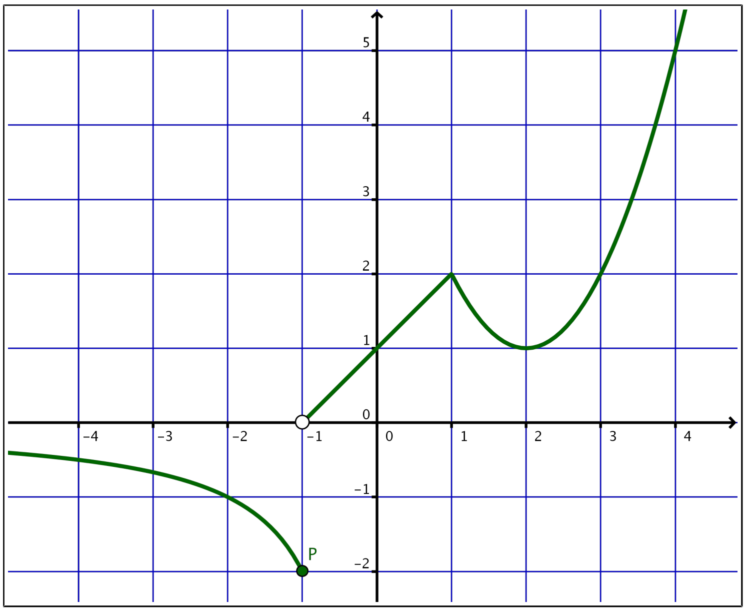
$f'(1)=$ No existe

$f'(2)=2\cdot 2-4=0$

c) La forman un trozo de curva ($y=\dfrac{2}{x}$ si $x\le -1$) + un trozo de recta ($y=x+1$ si $-1<x\le 1$) + un trozo de parábola ($y=x^2-4x+5$ si $x>1$). El vértice de la parábola lo encontramos para

$$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$$

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos:



✗ Ejercicio 3: Es

$$f(x)=ax^3+bx^2+x \xrightarrow{D} f'(x)=3ax^2+2bx+1$$

Es $f(1)=2$ ⇨ $a+b+1=2$ (*)

Es $f'(1)=0$ ⇨ $3a+2b+1=0$ (**)

Resolviendo el sistema formado por (*) y (**) obtenemos $a=-3$ y $b=4$.

✗ Ejercicio 4:

La función derivada será:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{2x} & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2+ax+b & \text{si} \quad x>0\end{cases} \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=\begin{cases}e^{2x}(2x+3) & \text{si} \quad x\le 0\\ 2x+a & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a)

- Es continua en el punto de cambio de fórmula. Así que las tendencias laterales coinciden:

TENDENCIAS en $x = 0$: $$\left|\begin{array}{llll}\text{si} & x\to 0- & \text{es} & y=(x+1)e^{2x}\to 1\\ \text{si} & x\to 0+ & \text{es} & y=x^2+ax+b\to b\end{array}\right\} \quad\to\quad b=1$$

- Es derivable en el punto de cambio de fórmula. Así que las derivadas laterales coinciden:

DERIVADAS LATERALES en $x = 0$: $$\left|\begin{array}{llll}\text{si} & x\to 0- & \text{es} & y'=e^{2x}(2x+3)\to 3\\ \text{si} & x\to 0+ & \text{es} & y'=2x+a\to a\end{array}\right\} \quad\to\quad a=3$$

b) Basta colocar a y b en la derivada inicial:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{2x} & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2+3x+1 & \text{si} \quad x>0\end{cases} \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=\begin{cases}e^{2x}(2x+3) & \text{si} \quad x\le 0\\ 2x+3 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$