Nombre: ____ **_Curso 2º_**	
Matemáticas Aplicadas II – Matrices y Determinantes – 09/nov/2011	

✗ Ejercicio 1: Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}3\\ -y\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}y & x\end{pmatrix}$$

a) [2] Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+3I=2A^t$.

b) [1] Obtenga la matriz A^{500}.

c) [1,5] Halle x e y sabiendo que $A\cdot C^t=B$.

✗ Ejercicio 2: Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & x & 1\\ -1 & -3 & x\end{pmatrix}$$

a) [1,5] ¿Para qué valor de x no existe la inversa de A ?

b) [1] Para $x=-2$ compruebe que la inversa de A es la matriz

$$\begin{pmatrix}-7 & 12 & -8\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

✗ Ejercicio 3: Consideremos el sistema

$$S\equiv\begin{cases} x+4z & = & 6\\ -2y+z & = & 0\\ -x-3y+az & = & a-1\end{cases}$$

a) [1] Averigüe para qué valores de a es compatible determinado.

b) [0,5] Resuelva el sistema para $a=1$

c) [1,5] Resuelva matricialmente el sistema anterior cuando es $a=-2$.

José Álvarez Fajardo

✗ Ejercicio 1:

a) Observemos que la matriz A es cuadrada y que tiene inversa:

$$det\,A=1 \;\rightarrow\; A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot(Adj\,A)^t=1\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Por ello para obtener X despejamos como sigue:

$$X\cdot A+3I=2A^t \;\rightarrow\; X\cdot A=2A^t-3I \;\rightarrow\; X=(2A^t-3I)\cdot A^{-1}$$

Operando:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

b) Calculemos las primeras potencias:

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \;,\; A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix} \;,\; A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix} \;,\; A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix} \;,\; \cdots$$

Por inducción obtenemos que es:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{pmatrix} \;,\; \forall n\geq 1$$

En particular, para $n = 1000$:

$$A^{500}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1000 & 1\end{pmatrix}$$

c) Vamos a efectuar las operaciones con las matrices y a igualar.

$$A\cdot C^t=B \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -y\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}y\\ 2y+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -y\end{pmatrix} \xrightarrow[igualando]{} \begin{cases}y=3\\ x+2y=-y \;\rightarrow\; x=-9\end{cases}$$

✗ Ejercicio 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero:

$$det\,A=x^2+4x+3=0 \;\rightarrow\; x=-1,-4$$

Resulta así:

$$\begin{array}{l} x=-1 \text{ ó } x=-4 \;\rightarrow\; det\,A=0 \;\rightarrow\; \text{No existe } A^{-1}\\ x\neq -1 \text{ y } x\neq -4 \;\rightarrow\; det\,A\neq 0 \;\rightarrow\; \text{Sí existe } A^{-1}\end{array}$$

b) Colocamos $x = -2$ y multiplicamos la matriz A por la que nos dicen que es su inversa:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 12 & -8\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

En efecto, obtenemos la matriz identidad, luego esa matriz es la inversa de la matriz A cuando colocamos $x = -2$.

✗ Ejercicio 3:

a) Usaremos la Regla de Cramer:

$$det\, C = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & a \end{pmatrix} = -2a-5$$

Veamos cuándo es cero:

$$-2a-5=0 \rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

Tenemos así:

$$a \neq -\frac{5}{2} \rightarrow det\, C \neq 0 \rightarrow S \text{ es compatible determinado}$$
$$a = -\frac{5}{2} \rightarrow det\, C = 0 \rightarrow S \text{ no es compatible determinado}$$

b) Usaremos la Regla de Cramer

$$a=1 \rightarrow det\, C=-7$$

Las soluciones son:

$$x=\frac{det\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{-7}=-\frac{1}{7} \;,\; y=\frac{det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-7}=\frac{6}{7} \;,\; z=\frac{det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-7}=\frac{12}{7}$$

c) El sistema expresado matricialmente es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Observamos que la matriz de los coeficientes es la del apartado (b) del ejercicio anterior, así:

$$C \cdot X = B \rightarrow X = C^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$